Є. П. Нелін

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦЯХ

Навчальний посібник для учнів 7—11-х класів

Рекомендовано
Головним управлінням загальної середньої освіти
Міністерства освіти України

Харків
«СВІТ ДИТИНСТВА»
1998

Р е ц е н з е н т и:

О. Ю. Харик
учитель-методист, завідувач кафедри математики
фізико-математичного ліцею №27 м. Харкова;
І. П. Проскурня
канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики
Харківського державного педагогічного університету ім. Г. С. Сковороди

Нелін Є. П.

Н49 Алгебра в таблицях (з Додатком): Навч. посібник для учнів 7—11-х класів. — Х.: Світ дитинства, 1998. — 116 с. (Додаток 56 с.)
ISBN 966-544-165-5.

У посібнику логічно упорядковано та систематизовано той мінімум основних і додаткових даних шкільного курсу алгебри, алгебри та початків аналізу і комбінаторики, котрий дає можливість розв'язувати задачі, що пропонуються на випускних чи вступних іспитах. Посібник може бути використаний як учнями для повторення шкільного курсу алгебри, алгебри та початків аналізу і комбінаторики, так і вчителями на уроці при узагальненні тієї чи іншої теми незалежно від того, за якими підручниками алгебри і алгебри та початків аналізу для середньої школи вони працюють.

Для учнів 7—11-х класів загальноосвітніх закладів.

$Н\frac{1602040000-15}{544-98}$ **ББК 22.14я721**

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦЯХ

Навчальний посібник

Розділ «Рівняння та нерівності» підготувала *О. Є. Неліна*

Редактор *С. Г. Меркулова*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Цибульник*
Коректор *І. О. Кісуленко*

Підписано до друку оригінал-макет 09.11.98. Формат $60\times84/_8$. Папір газетний.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 13,48 + 6,5 (Додаток).
Обл.-вид. арк. 7,8 + 6,2 (Додаток). Тир. 10 000. Зам. 8-500.

Видавництво «Світ дитинства».
Україна, 310001 Харків, пр. Гагаріна, 1.

Віддруковано з діапозитивів на книжковій фабриці «Глобус».
Україна, 310012 Харків, вул. Енгельса, 11.

ISBN 966-544-165-5

ЗМІСТ

ВСТУП

У посібнику логічно упорядковано й систематизовано той мінімум основних і додаткових відомостей зі шкільних курсів алгебри та початків аналізу, який дає змогу розв'язувати найскладніші алгебраїчні завдання, що пропонуються на випускних і вступних іспитах з математики.

Крім теоретичного матеріалу та прикладів його використання, наведених у серії таблиць, у додатку до посібника розглянуто приклади розв'язування алгебраїчних завдань*. Особливу увагу приділено виконанню тотожних перетворень виразів і розв'язуванню рівнянь та нерівностей. Як і в самих таблицях, так і в додатку до них для різних типів рівнянь та нерівностей виділяються «ключові» ідеї та методи їх розв'язування у вигляді загальних схем або приписів, порад алгоритмічного типу. Ці загальні схеми особливо важливі для систематизації знань і умінь у процесі підготовки до випускних і вступних іспитів з математики.

Певна річ, цей посібник — не єдина книжка, в якій розглядаються методи розв'язування рівнянь та нерівностей, проте в інших пропонується повторювати різні типи рівнянь і нерівностей без розгляду об'єктивно існуючих між ними зв'язків. За такого підходу повторення, наприклад, методів розв'язувань ірраціональних рівнянь та нерівностей ніяк не пов'язується з повторенням методів розв'язувань логарифмічних рівнянь та нерівностей і кожен із цих методів має бути засвоєний окремо, без зв'язку з іншими. Тому автори таких посібників вважають за необхідне запам'ятовування великої кількості ізольованих методів і способів розв'язування рівнянь та нерівностей, що дуже важко реалізувати на практиці. Проблема засвоєння таких методів ускладнюється ще й тим, що практично в усіх посібниках в основному даються лише зразки розв'язань окремих рівнянь і нерівностей без виділення загальних ідей та методів.

Цей посібник вигідно відрізняється тим, що тут пропонується систематизовувати й узагальнювати свої знання та вміння, наприклад у розв'язуванні рівнянь та нерівностей, за допомогою виділення загальних схем міркувань стосовно розв'язування будь-яких рівнянь та нерівностей (див., наприклад, табл. 40—44 і коментар до них у Додатку, с. 10). Розглядувані схеми пов'язані передусім із пошуком плану розв'язування, а вже потім — з самим розв'язуванням. Тому в деяких випадках у нашому посібнику наведено не тільки варіанти розв'язань рівнянь та нерівностей, але й той коментар, що має (хоча б у думках) супроводжувати роботу з завданнями.

Виділення загальних схем міркувань дає можливість не тільки розібратися з пошуком плану розв'язування і з самим розв'язуванням, а й усвідомити особливості оформлення записів рівнянь та нерівностей при використанні різних методів розв'язування. Зауважимо, що при оформленні розв'язання екзаменаційних завдань (випускного чи вступного іспиту) слід враховувати, що для таких записів неможливо дати зразки-еталони, і тому зразки оформлення, наведені в будь-якому посібнику (зокрема, в нашому),— лише один із можливих варіантів оформлення розв'язання. Обов'язковим при оформленні розв'язань екзаменаційних завдань з математики є виконання лише двох умов:

1) розв'язання не повинно мати математичних помилок;

2) кожний логічний крок розв'язання має бути мотивованим.

Зважаючи на загальний характер цих умов, для багатьох завдань, що пропонуються на випускних чи вступних іспитах з математики (зокрема, для розв'язань рівнянь та нерівностей), можна запропонувати не менше чотирьох—п'яти різних варіантів оформлення розв'язання, котрі б задовольняли зазначеним умовам (і кожне з цих оформлень може заслуговувати на відмінну оцінку в екзаменаційній роботі!). Деякі з таких варіантів наведені в нашому посібнику і можуть служити певним орієнтиром для оформлення екзаменаційних завдань.

Для зручності роботи з таблицями їх згруповано по традиційних розділах шкільних курсів алгебри і алгебри та початків аналізу. Назви цих 9 розділів дано у змісті, вміщеному на початку посібника. У кінці наведено предметний покажчик, що дає можливість оперативно визначити номери сторінок, на яких розглядаються відповідні поняття, правила або формули.

Навчальний посібник може бути використаний як учнями для повторення шкільних курсів алгебри та початків аналізу, так і вчителями на уроці при узагальненні матеріалу тієї чи іншої теми в процесі роботи за будь-яким підручником алгебри або алгебри та початків аналізу для середньої школи.

---

* Див.: *Нелін Є. П.* Методи розв'язування алгебраїчних задач: Додаток до навчального посібника «Алгебра в таблицях».— Х.: Світ дитинства, 1998.

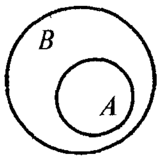
Таблиця 1

МНОЖИНИ І ДЕЯКІ ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Позначення	
Елемент a належить множині A $\Leftrightarrow$ $a \in A$	**Поняття множини.** Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних невизначуваних понять. Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається **елементом цієї множини.**
Елемент b не належить множині A $\Leftrightarrow$ $b \notin A$	
У множині немає елементів $\Leftrightarrow$ $\varnothing$	Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою множиною**

Підмножина ($\subset$)

$A \subset B$

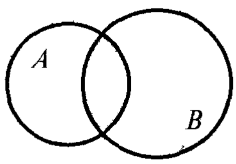


$A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Якщо $x \in A$, то $x \in B$

Якщо кожний елемент однієї множини A є елементом другої множини B, то говорять, що перша множина A є підмножиною другої множини B і записується так: $A \subset B$.
Використовується також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B

Переріз множин ($\cap$)

$A \cap B$

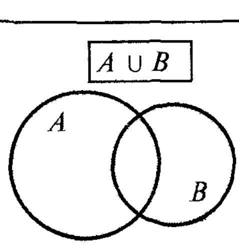


$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$

Перерізом множин A і B називають їхню спільну частину, тобто множину усіх елементів, що належать як множині A, так і множині B

Об'єднання множин ($\cup$)

$A \cup B$



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$

Об'єднанням множин A і B називають множину, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (A або B)

Таблиця 2

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Комплексні числа K (або C)

Числа вигляду $a + bi$, де $a, b \in \boldsymbol{R}$, i — уявна одиниця, $i^2 = -1$

Дійсні числа R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Уявні числа

$a + bi$, де $b \neq 0$

Раціональні числа Q

Раціональні числа Q	
Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число	Записується у вигляді нескінченного **періодичного** десяткового дробу $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)\right)$

Ірраціональні числа

Ірраціональні числа	
Не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число	Записується у вигляді нескінченного **неперіодичного** десяткового дробу $(\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots)$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені з цілого числа часток одиниці

Приклади. $\frac{2}{5}$ — звичайний дріб;

3,27 — десятковий дріб ($3{,}27 = \frac{327}{100}$);

$\frac{6}{3}$ — дробове число, значення якого дорівнює цілому числу ($\frac{6}{3} = 2$)

Натуральні числа N (цілі додатні)

Для шкільного курсу математики натуральне число — основне невизначуване поняття

Число 0

Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється

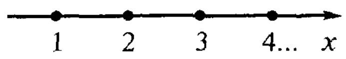
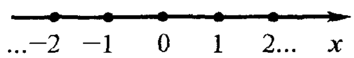
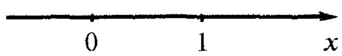
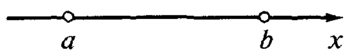
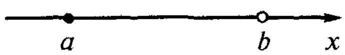
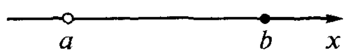
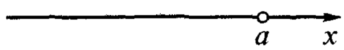
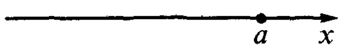
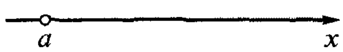
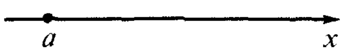
$a + 0 = 0 + a = a$

Цілі від'ємні числа

Числа, протилежні до натуральних

$$\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R \subset K}$$

Таблиця 3

ПОЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН			
Позначення	**Зображення**	**Запис за допомогою нерівностей**	**Словесне формулювання**
N			Множина всіх натуральних чисел
Z			Множина всіх цілих чисел
Q			Множина всіх раціональних чисел
R		$-\infty < x < +\infty$	Множина всіх дійсних чисел
$(-\infty; +\infty)$			Числова пряма
$[a; b]$		$a \le x \le b$	Закритий проміжок (відрізок) з кінцями a і b ($a < b$)
$(a; b)$		$a < x < b$	Відкритий проміжок (інтервал) з кінцями a і b
$[a; b)$		$a \le x < b$	Напіввідкритий проміжок (напівінтервал) з кінцями a і b
$(a; b]$		$a < x \le b$	
$(-\infty; a)$		$x < a$	Нескінченний проміжок (промінь)
$(-\infty; a]$		$x \le a$	
$(a; +\infty)$		$x > a$	
$[a; +\infty)$		$x \ge a$	

Таблиця 4

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ	
Властивості числових рівностей	Властивості числових нерівностей
1. Якщо $a = b$, то $b = a$	1. Якщо $a > b$, то $b < a$
2. Якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$ (*транзитивність рівності*)	2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$ (*транзитивність нерівності*)
4. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $\overline{a + c = b + d}$	4. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $\overline{a + c > b + d}$
3. Якщо $a = b$, то $a + c = b + c$	3. Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$
5. Якщо $a = b$ і $c \neq 0$, то $ac = bc$	5. а) Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$ б) Якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$
6. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $\overline{ac = bd}$	6. Якщо $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$) і $c > d$ ($c > 0$, $d > 0$), то $\overline{ac > bd}$
7. Якщо $a = b$, то $a^n = b^n$	7. а) Якщо $a > b$ ($a > 0$, $b \geq 0$), то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Якщо $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Якщо $a = b$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$), то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a = b$, то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Якщо $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a > b$, то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Якщо $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Якщо $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ або $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$ б) $ab < 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$
11. $\frac{a}{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ і $b \neq 0$	11. а) $\frac{a}{b} > 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$ б) $\frac{a}{b} < 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$

Таблиця 5

ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Означення середніх величин

Середнє арифметичне	Середнє геометричне
$A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — будь-які числа	$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ $a_1 \geq 0;\ a_2 \geq 0; \ldots; a_n \geq 0$
Середнє гармонічне	**Середнє квадратичне**
$H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}$ $a_1 \neq 0;\ a_2 \neq 0; \ldots; a_n \neq 0,\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} \neq 0$	$S = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — будь-які числа

Загальне співвідношення між середніми

$\boxed{S \geq A_n \geq G_n \geq H_n}$ $(a_1 > 0;\ a_2 > 0; \ldots; a_n > 0)$,

причому рівність досягається тільки при

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Нерівність Коші

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a \geq 0;\ b \geq 0$

$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, $a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$

. . .

$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $a_1 \geq 0;\ a_2 \geq 0; \ldots; a_n \geq 0$

Середнє арифметичне декількох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного. (Рівність досягається тільки тоді, коли всі числа рівні між собою.)

Наслідки

1. *Якщо сума додатних чисел постійна, то їхній добуток буде найбільшим, коли числа рівні між собою*
2. *Якщо добуток додатних чисел постійний, то їхня сума буде найменшою, коли числа рівні між собою*

Оцінка суми двох взаємно обернених чисел

Якщо $a > 0$, то	Якщо $b < 0$, то
$\boxed{a + \dfrac{1}{a} \geq 2}$	$\boxed{b + \dfrac{1}{b} \leq -2}$
Сума двох взаємно обернених додатних чисел більша або дорівнює 2 (причому рівність досягається тільки при $a = 1$)	*Сума двох взаємно обернених від'ємних чисел менша або дорівнює (–2) (причому рівність досягається тільки при $b = -1$)*

Оцінка суми квадратів трьох чисел

$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc}$ для будь-яких a, b, c

Нерівність Бернуллі

Для будь-якого дійсного числа $a > 0$ і будь-якого раціонального $r > 0$

$$\boxed{(1 + a)^r > 1 + ra}$$

Нерівність Коші — Буняковського

Для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли числа a_i і b_i пропорційні (якщо ці числа не дорівнюють нулю, то це значить, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, а якщо якісь із цих чисел дорівнюють нулю, то пропорційність означає, що існує таке число $\lambda \neq 0$, що $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, ..., $a_n = \lambda b_n$)

Методи доведення нерівностей

1. *Складення різниці лівої і правої частин (якщо різниця додатна, то ліва частина більша за праву)*	**Приклад.** Довести нерівність $a^3 + b^3 \geq ab\,(a + b)$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$. **Розв'язання.** $a^3 + b^3 - ab\,(a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 =$ $= a^2\,(a - b) - b^2\,(a - b) = (a - b)\,(a^2 - b^2)$ $= (a - b)^2\,(a + b) \geq 0$ (оскільки при $a \geq 0$ і $b \geq 0$ $a + b \geq 0$ і $(a - b)^2 \geq 0$), отже, $a^3 + b^3 \geq ab\,(a + b)$
2. *Використання відомих спеціальних нерівностей (табл. 5) і властивостей числових нерівностей (табл. 4), зокрема посилення нерівності з використанням транзитивності*	**Приклад.** Довести нерівність $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. **Розв'язання**. Запишемо нерівність Коші (див. вище) для невід'ємних чисел a і b, b і c, a і c: $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{b + c}{2} \geq \sqrt{bc}$, $\frac{a + c}{2} \geq \sqrt{ac}$. Перемноживши почленно ці нерівності (з невід'ємними членами!), одержуємо $\frac{(a + b)\,(b + c)\,(a + c)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$. Домноживши обидві частини цієї рівності на додатне число 8 і враховуючи, що $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, одержуємо $(a + b)\,(b + c)\,(a + c) \geq 8abc$
3. *Використання зростання або спадання відповідних функцій і використання похідної (означення і властивості похідної див. табл. 72—77)*	**Приклад.** Довести нерівність $\ln x \leq x - 1$ при $x \geq 1$. **Розв'язання.** Розглянемо функцію $f(x) = \ln x - x + 1$. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x} < 0$ при $x > 1$. Отже, $f(x)$ спадає на $(1; +\infty)$ (а враховуючи неперервність $f(x)$ у точці 1, і на $[1; +\infty)$). Але $f(1) = 0$. Отже, при $x > 1$ $f(x) < f(1) = 0$. При $x = 1$ задана нерівність перетворюється на рівність. Таким чином, $\ln x - x + 1 \leq 0$, тобто $\ln x \leq x - 1$, при $x \geq 1$

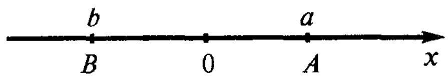
Таблиця 6

МОДУЛЬ ЧИСЛА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Означення	Приклади
Модулем додатного числа називається само це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю	$\lvert -3\rvert = 3$; $\lvert 5\rvert = 5$; $\lvert 0\rvert = 0$; $\lvert a^4\rvert = a^4$ (оскільки $a^4 \geq 0$)

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ 0 \text{ при } a = 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ -a \text{ при } a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0 \\ -a \text{ при } a \leq 0 \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля



$$\boxed{|a| = OA;\ |b| = OB}$$

$$\boxed{|a - b| = AB}$$

На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

Властивості

1	$\lvert a\rvert \geq 0$	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число
2	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Модулі протилежних чисел рівні
3	$a \leq \lvert a\rvert$	Величина числа не перевищує величини його модуля
4	$\lvert a\quad b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	*Модуль добутку дорівнює добуткові модулей співмножників*
5	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \neq 0)$	*Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)*

6 $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$	7. $\lvert a\rvert^2 = a^2$	8. $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$

9	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \leq \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків
10.	$\lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert \leq \lvert a \pm b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	

Таблиця 7

ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ	
Означення. Ціле число a ділиться на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле c, що $a = bc$ У цьому випадку b називають **дільником** числа a, а число a — **кратним** числу b	**Позначення** $\boxed{a \text{ ділиться на } b} \Leftrightarrow \boxed{a \vdots b}$ $\boxed{\begin{matrix} a \vdots b \\ a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{існує } c \in \mathbf{Z} \\ a = bc \end{matrix}}$
Властивості	
1. Якщо $\boldsymbol{a \vdots b}$ і $\boldsymbol{a > 0}$, то $\boldsymbol{a \geq b}$	4. Якщо $\boldsymbol{a \vdots b}$ і $\boldsymbol{b \vdots c}$, то $\boldsymbol{a \vdots c}$ (*транзитивність ділення*)
2. Якщо $\boldsymbol{a \vdots b}$ і $\boldsymbol{b \vdots a}$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\boldsymbol{a = b}$	5. Якщо $\boldsymbol{a \vdots b}$ і $\boldsymbol{k \neq 0}$, то $\boldsymbol{ak \vdots bk}$
3. Якщо $\boldsymbol{a \vdots c}$ і $\boldsymbol{b \vdots c}$, m і n — будь-які цілі числа, то $\boldsymbol{(ma + nb) \vdots c}$ **Окремий випадок** ($m = 1$, $n = \pm 1$) Якщо $\boldsymbol{a \vdots c}$ і $\boldsymbol{b \vdots c}$, то $\boldsymbol{(a \pm b) \vdots c}$ Якщо кожний доданок ділиться на c, то їхня алгебраїчна сума також ділиться на c	6. Якщо $\boldsymbol{a \vdots b}$ і $\boldsymbol{a \vdots c}$, причому $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ — **взаємно прості** числа (тобто їхній НОД дорівнює одиниці), то $\boldsymbol{a \vdots bc}$ **Приклад.** 48 ділиться на 3 і на 8 (3 і 8 — взаємно прості числа), тоді 48 ділиться на $3 \cdot 8 = 24$

Таблиця 8

ПРОСТІ І СКЛАДЕНІ ЧИСЛА. ПРОСТІ ДІЛЬНИКИ	
Означення простого числа Натуральне число p називається **простим**, якщо в нього тільки два натуральних дільники — 1 і само число p 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, . . . — прості числа *Простих чисел нескінченно багато*	**Означення складеного числа** Натуральне число називається **складеним**, якщо воно має більше двох натуральних дільників 6, 15, 130, 998, ... — складені числа
1 не є ні простим числом, ні складеним	

Властивості простих дільників натуральних чисел

1. Будь-яке натуральне число (більше за одиницю) або ділиться на дане просте число p, або є взаємно простим з ним	2. ***Якщо добуток декількох співмножників ділиться на просте число** p**, то принаймні один із співмножників ділиться на** p*
Найменший простий дільник складеного числа a не перевищує $\sqrt{a}$	**Приклад.** Найменший простий дільник числа 143 дорівнює 11 ($143 = 11 \cdot 13$), причому $11 < \sqrt{143} \approx 11{,}96$
Наслідок Якщо задане число q не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5, ..., p, де $p \le \sqrt{q}$, то це число q — просте	**Приклад.** Нехай $q = 113$, тоді $\sqrt{113} \approx 10$. Усі прості числа $p \le \sqrt{113}$: 2, 3, 5, 7. Оскільки 113 не ділиться на жодне з цих простих чисел, то воно само є простим

Основна теорема теорії подільності

Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників

$$\boxed{a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m,}$$
де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — прості числа

Запис $\boxed{a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}$ — **канонічний розклад числа** a

($p_1, p_2, \ldots, p_k$ — прості числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральні)

Приклади. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$;

$792 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^1$

Запис довільного дільника числа *a* через прості дільники

Якщо $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — *канонічний розклад числа a, то натуральними дільниками числа a будуть лише числа* $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, де $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, ..., $0 \le \beta_k \le \alpha_k$

Кількість усіх дільників числа a **дорівнює**

$$\boxed{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)}$$

Приклад. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Будь-який дільник числа 180:

$d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, де $0 \le \beta_1 \le 2$, $0 \le \beta_2 \le 2$, $0 \le \beta_3 \le 1$

Кількість усіх дільників: $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$

β_1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
β_2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2
β_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d	1	5	3	15	9	45	2	10	6	30	18	90	4	20	12	60	36	180

Таблиця простих чисел (до 997)

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307
311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853
857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Таблиця 9

ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ ТА ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

Теорема про ділення з остачею

Для будь-якої пари чисел a і b ($b \neq 0$) ***існує, і притому єдина, пара цілих чисел q і r, таких, що $a = bq + r$, де $0 \le r < |b|$***
(q — неповна частка від ділення a на b,
r — остача від ділення a на b)

Якщо при діленні a на b **остача $r = 0$**, то це означає, що a **ділиться на** b ($a \vdots b$)

Приклади

1. При діленні 37 на 5 — неповна частка $q = 7$ і остача $r = 2$, оскільки $37 = 5 \cdot 7 + 2$
2. При діленні (–37) на 5 — неповна частка $q = -8$ і остача $r = 3$, оскільки $-37 = 5 \cdot (-8) + 3$ (остача не буває від'ємною!)

Спосіб знаходження остач при діленні на число m ($m \in N$)

Приклад. Знайти остачу при діленні числа $A = 1997^{1998} + 1999^{2000}$ на 37

Розв'язання. 1999 при діленні на 37 дає в остачі 1,
1997 при діленні на 37 дає в остачі 36, але таку ж саму остачу дає і число –1 ($-1 = 37 \cdot (-1) + 36$).
Тоді число A при діленні на 37 дає остачу $(-1)^{1998} + 1^{2000}$, тобто 2

1. Переконуємось, що заданий числовий вираз містить лише суми, добутки і степені цілих чисел.
2. Для кожного доданка, співмножника чи основи степеня знаходимо його остачу r при діленні на m (якщо остача більша за $\frac{m}{2}$, то іноді зручно замість остачі r взяти від'ємне число $r - m$, яке дає ту ж саму остачу r при діленні на m).
3. Підставляємо одержані числа в заданий вираз (замість відповідних доданків, співмножників чи основ степенів) і одержуємо число, яке дає ту ж саму остачу при діленні на m, що й заданий вираз

Ознаки подільності

Задане число ділиться на число m, якщо виконуються зазначені нижче умови
Остачі при діленні на m заданого числа і числа, виділеного в ознаці, збігаються

Подільність на m	Умова
На 2	*Остання цифра числа ділиться на 2 (парна)*
На 5	*Остання цифра числа 0 або 5*
На 10^k	*Число закінчується на k нулів*
На 4	*Число, виражене двома останніми цифрами даного числа, ділиться на 4*
На 8	*Число, виражене трьома останніми цифрами даного числа, ділиться на 8*
На 3	*Сума цифр числа ділиться на 3*
На 9	*Сума цифр числа ділиться на 9*
На 11	*Різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11*

Таблиця 10

НСД І НСК ДВОХ ЧИСЕЛ. ВЗАЄМНО ПРОСТІ ЧИСЛА

Найбільший спільний дільник (НСД)

Означення. Найбільшим спільним дільником двох або декількох натуральних чисел називається найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел

Приклади
НСД (12; 18) = 6;
НСД (50; 65; 80) = 5

Взаємно прості числа

Означення. Два натуральних числа називаються взаємно простими, якщо їхній НСД дорівнює одиниці	**Приклад** 8 і 15 — взаємно прості числа НСД (8; 15) = 1

Знаходження НСД двох натуральних чисел

Алгоритм	Приклади
I. За допомогою розкладання на прості множники 1) розкласти дані числа на прості множники (у канонічному вигляді: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) скласти добуток зі спільних простих множників, взятих із найменшим показником степеня; 3) знайти значення одержаного добутку	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7,$ $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Тоді НСД $(a;\ b) = 2^2 \cdot 5^1 = 20$
II. За допомогою алгоритму Евкліда 1. Опорна властивість. Якщо $a = bq + r$, то НСД $(a;\ b)$ = НСД $(b;\ r)$ 2. **Алгоритм Евкліда** $(a > b)$ 1) поділити a на b з остачею $a = bq + r_1$; 2) поділити дільник b на остачу r_1 $b = r_1q_1 + r_2$; 3) поділити новий дільник r_1 на нову остачу r_2 $r_1 = r_2q_2 + r_3$ і так далі ... **Остання відмінна від нуля остача і є НСД**	$(a = 280,\ b = 60)$ 280 : 60 = 4 (остача 40); 60 : 40 = 1 (остача 20); 40 : 20 = 2 (остача 0) НСД (280; 60) = = НСД (60; 40) = = НСД (40; 20) = 20
III. Якщо *a* ділиться на *b*, то НСД (***a*; *b***) = ***b***	НСД (180; 60) = 60; оскільки 180 ділиться на 60

```
 280 | 60
-240 |----
   40| 4
  60 | 40
 -40 |----
  20 | 1
 40 | 20
-40 |----
  0 | 2
```

Найменше спільне кратне (НСК)

Означення. Найменшим спільним кратним двох або декількох натуральних чисел називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел	**Приклади** НСК (12; 18) = 36; НСК (5; 8; 10) = 40

Знаходження НСК двох натуральних чисел

Алгоритм	Приклади
I. 1) розкласти дані числа на прості множники (у канонічному вигляді: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) скласти добуток з усіх одержаних простих множників, взявши кожний з них з найбільшим показником степеня; 3) знайти значення одержаного добутку	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7,$ $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Тоді НСК $(a;\ b) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 840$
Окремий випадок Якщо a ділиться на b, то НСК $(a;\ b) = a$	НСК (180; 60) = 60; оскільки 180 ділиться на 60
II. НСК можна також знайти за формулою $\boxed{\text{НСК } (a;\ b) = \dfrac{ab}{\text{НСД } (a;\ b)}}$	НСК $(280;\ 60) = \dfrac{280 \cdot 60}{\text{НСД } (280;\ 60)} = \dfrac{280 \cdot 60}{20} = 840$

Зв'язок між НСД і НСК двох чисел

$\boxed{\text{НСД } (a;\ b) \cdot \text{НСК } (a;\ b) = ab}$	*Добуток НСД і НСК двох натуральних чисел дорівнює добутку цих чисел*

Таблиця 11

ПРОЦЕНТИ (ВІДСОТКИ)

Означення. Процентом називається сота частина цілого (яке береться за одиницю)

$$\boxed{1\% \text{ від числа } a = \frac{1}{100}a}$$

Основні задачі на проценти

1. Знаходження процента від числа

$p\%$ від числа $a = \frac{p}{100}a$	**Приклад.** Знайти 7% від числа 300 **Розв'язання.** $\frac{7}{100}\cdot 300 = 21$

2. Знаходження числа за заданим значенням його процента

Якщо $p\%$ від якогось числа дорівнює b, то все число дорівнює $b : \frac{p}{100} = \frac{b\cdot 100}{p}$	**Приклад.** Знайти число, 30% якого дорівнює 24 **Розв'язання.** Шукане число x є розв'язок рівняння $\frac{30}{100}\cdot x = 24$, звідки $x = 24 : \frac{30}{100} = 80$

3. Знаходженя процентного відношення двох чисел

Число a складає $\frac{a}{b}\cdot 100\%$ від числа b	**Приклад.** Скільки процентів складає число 26 від числа 65? **Розв'язування.** Шукане число процентів x задовольняє рівнянню $\frac{x}{100}\cdot 65 = 26$, звідки $x = \frac{26}{65}\cdot 100 = 40$ (%)

4. Складні проценти

Поняття складного процента. Якщо задане число щороку (щомісяця, щодня тощо) збільшується на p % без вилучення приросту (тобто приріст за рік додається до початкової величини і процент за наступний рік обчислюється з нарощеної величини), то в цьому випадку говорять про складні проценти (аналогічно, якщо щороку «зменьшується на p %»)

Обчислення складних процентів

Стежити за зміною заданого числа при обчислюванні складних процентів зручно за допомогою таких таблиць, увівши ***коефіцієнт збільшення (зменшення) k***

	1-й рік	**2-й рік**	**3-й рік**	**. . .**	***n-й рік***
Щорічне збільшення на p % ($k = 1 + \frac{p}{100}$)					
Було	a	ka	k^2a		
Збільшилось за рік	$\frac{p}{100}\cdot a$	$\frac{p}{100}\cdot ka$	$\frac{p}{100}\cdot k^2a$		
Стало	$a + \frac{p}{100}\ a = (1 + \frac{p}{100})\ a = ka$	$ka + \frac{p}{100}\cdot ka = (1 + \frac{p}{100})\ ka = k^2a$	$k^2a + \frac{p}{100}\cdot k^2a = (1 + \frac{p}{100})\ k^2a = k^3a$	. . .	k^na
Щорічне зменшення на p % ($k = 1 - \frac{p}{100}$)					
Було	a	ka	k^2a		
Зменшилось за рік	$\frac{p}{100}\cdot a$	$\frac{p}{100}\cdot ka$	$\frac{p}{100}\ k^2a$		
Стало	$a - \frac{p}{100}\cdot a = (1 - \frac{p}{100})\ a = ka$	$ka - \frac{p}{100}\cdot ka = (1 - \frac{p}{100})\ ka = k^2a$	$k^2a - \frac{p}{100}\cdot k^2a = (1 - \frac{p}{100})\ k^2a = k^3a$	. . .	k^na

Таблиця 12

ПРОПОРЦІЇ

Означення. Пропорцією називається рівність двох числових відношень (відношенням називають частку від ділення одного числа на інше)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ або $a:b=c:d$ $(a, b, c, d \neq 0)$	a і d — крайні члени пропорції; b і c — середні члени. Кожний член пропорції називається четвертим пропорційним відносно інших трьох

Властивості

$ad=bc$	***Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів***
$a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$	Кожний крайній член пропорції дорівнює добутку її середніх, поділеному на інший крайній
$b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$	Кожний середній член пропорції дорівнює добутку її крайніх, поділеному на інший середній
Одночасно є справедливими такі пропорції: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$	У кожній пропорції можна поміняти місцями або лише середні члени, або лише крайні, або і ті, й інші одночасно

Похідні пропорції

Якщо задана пропорція $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливе співвідношення

$$\boxed{\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}},$$

що називається похідною пропорцією (де m, n, p, q — будь-які числа і $ma+nb$, $pa+qb$, $mc+nd$, $pc+qd \neq 0$)

Найчастіше вживані похідні пропорції

Якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то 1) $\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$, 2) $\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$, 3) $\boxed{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}}$,

4) $\boxed{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}}$, 5) $\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$, 6) $\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}}$.

Властивість рівності декількох відношень

З рівності декількох відношень $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ одержуємо:

1) $\boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}}$

2) $\boxed{\frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}}$,

де $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — будь-які числа і $b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n \neq 0$

Таблиця 13

ОДНОЧЛЕНИ, МНОГОЧЛЕНИ І ДІЇ НАД НИМИ

Одночлени

Означення	Приклади
Одночленом *називається скінченний добуток чисел, букв та їхніх натуральних степенів, а також самі числа, букви та їхні степені* **Число 0 називається нульовим одночленом**	0; $3a^2x$; $-\frac{2}{3}ab^3$; 5; y; x^6 — одночлени
Степенем одночлена називається сума показників букв, що входять в одночлен. Якщо одночленом є число, що не дорівнює нулю, то його степінь вважається рівним нулю **Число 0 степеня не має**	$3a^3b^2c$ — одночлен шостого степеня ($3+2+1=6$); $5ax^3$ — одночлен четвертого степеня ($1+3=4$); 7 — одночлен нульового степеня
Якщо до запису одночлена входить змінна x у степені k (x^k), то говорять, що цей **одночлен має по x** (або відносно x) **степінь k**	$5ax^3$ — одночлен третього степеня відносно змінної x
Одночлен записано у **стандартному вигляді**, якщо перший його множник є число, що називається **коефіцієнтом одночлена**, а далі стоять букви в деяких степенях, розташовані за алфавітом (латинським або грецьким)	$7a^5b^3c^6$; $-4xy^3z^2$; $3\alpha^2\beta\gamma^3$ — одночлени у стандартному вигляді
Одночлени називаються **подібними**, якщо вони рівні між собою або розрізняються лише своїми коефіцієнтами	$4a^3b^2$; $-7a^3b^2$; $\frac{2}{3}a^3b^2$ — подібні одночлени

Дії над одночленами

Додавання і віднімання	$3a^2 + ab + b^2 + 5a^2 - 3ab = 8a^2 - 2ab + b^2$
Множення	$(4a^3b^2c) \cdot (-2a^4bd) = -8a^7b^3cd$
Піднесення до степеня	$(2x^2y)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3y^3 = 8x^6y^3$
Ділення	$(18a^6b^4c) : (3a^3b^2c) = \frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c} = 6a^3b^2$

Многочлени

Означення	Приклади
Многочленом *називається сума скінченного числа одночленів (кожний з яких називається членом многочлена).* Одночлени також вважаються многочленами, що складаються з одного члена **Число 0 називається нульовим многочленом**	$5a^2b + ab + 3$; $2x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлени (тут $-5x^2 = +(-5)x^2$) 0; $2ax^2$; 7; x — многочлени, що складаються з одного члена
Степенем ненульового многочлена називається найбільший степінь із степенів його членів (одночленів) **Нульовий многочлен (0) степеня не має**	$a^2 + abc - c^2$ — многочлен третього степеня (оскільки найбільший степінь у члена abc — третій)

Дії над многочленами	
Додавання	$(2a^2 + 3ab - 5b) + (7a^2 - 4ab + 5b) = 9a^2 - ab$
Віднімання	$(4x - 3y) - (2x + 5y) =$ $= (4x - 3y) + (-2x - 5y) = 2x - 8y$
Множення	$(a + 5b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 5ab - 10b^2 =$ $= a^2 + 3ab - 10b^2$
Тотожно рівні многочлени	
Означення. Два многочлени називаються тотожно рівними, якщо вони набувають рівних значень при будь-яких значеннях букв (іноді тотожна рівність позначається знаком « $\equiv$ »)	**Приклад** $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (для будь-яких значень букв a і b рівність правильна)
Основні прийоми розкладання многочлена на множники	
Винесення спільного множника за дужку	$15ab^2 + 3a^2 - 6a = 3a(5b^2 + a - 2)$
Метод групування	$xy + 2yz - x - 2z = y(x + 2z) - (x + 2z) =$ $= (x + 2z)(y - 1)$
Використання формул скороченого множення та інших формул (див. також табл. 14)	$a^2 + 10ab^2 + 25b^4 = (a + 5b^2)^2$; $a^4 + 64 = a^4 + 16a^2 + 64 - 16a^2 =$ $= (a + 8)^2 - (4a)^2 = (a + 8 + 4a)(a + 8 - 4a)$

Таблиця 14

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ І РОЗКЛАДУ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ НА МНОЖНИКИ	
$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$	**Квадрат суми** двох чисел дорівнює квадрату першого числа плюс подвоєний добуток першого числа на друге і плюс квадрат другого числа
$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$	**Квадрат різниці** двох чисел дорівнює квадрату першого числа мінус подвоєний добуток першого числа на друге і плюс квадрат другого числа
$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$	**Різниця квадратів** двох чисел дорівнює добутку суми цих чисел на їх різницю
$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)}$	**Куб суми** двох чисел дорівнює кубові першого числа плюс потроєний добуток квадрата першого числа на друге, плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого і плюс куб другого числа
$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ $\boxed{(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)}$	**Куб різниці** двох чисел дорівнює кубові першого числа мінус потроєний добуток квадрата першого числа на друге, плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого і мінус куб другого числа
$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$	**Сума кубів** двох чисел дорівнює добуткові суми цих чисел на неповний квадрат різниці цих чисел

$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$	**Різниця кубів** двох чисел дорівнює добуткові різниці цих чисел на неповний квадрат суми цих чисел
$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$	**Квадрат суми** кількох виразів дорівнює сумі квадратів усіх доданків плюс усі подвоєні добутки кожного виразу на кожний наступний

Розклад на множники квадратного тричлена і деяких многочленів

Квадратний тричлен

$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$, де x_1 и x_2 — корені квадратного тричлена, тобто корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Узагальнення

1. ***Якщо для многочлена n-го степеня від змінної x ми знаємо n його коренів*** x_1 ; x_2 ; ... ; x_n, то

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

2. ***Якщо для многочлена $f(x)$ ми знаємо лише один корінь*** $x = \alpha$ (тобто α — один із коренів рівняння $f(x) = 0$), тоді цей многочлен ділиться без остачі на $x - \alpha$ і його можна записати так:

$\boxed{f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)}$ (α — корінь рівняння $f(x) = 0$), де $g(x)$ можна знайти, наприклад, діленням «куточком» $f(x)$ на $x - \alpha$ (див. табл. 15)

Узагальнення деяких формул скороченого множення

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Приклади

1. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
2. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
3. При $b = 1$ $\boldsymbol{a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)}$

Для **непарних** натуральних n

$$\boldsymbol{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Приклади

1. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
2. При $b = 1$ ($n = 2k + 1$ — непарне)
$\boldsymbol{a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \ldots + a^2 - a + 1)}$

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)}$$

Степінь двочлена (біном Ньютона)

$\boldsymbol{(a + b)^n = a^n + \alpha_1 a^{n-1}b + \alpha_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + \alpha_{n-2}a^2b^{n-2} + \alpha_{n-1}ab^{n-1} + b^n}$ (див. також табл. 80),
де коефіцієнти цього розкладу
1; α_1; α_2;...; α_{n-2}; α_{n-1}; 1 можна взяти з таблиці, що називається **трикутником Паскаля**

Степінь	Коефіцієнти розкладу
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
......	....

У цій таблиці в кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч

Приклад. $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

МНОГОЧЛЕН ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Означення. Многочленом стандартного вигляду від однієї змінної x називається многочлен вигляду $\boldsymbol{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ — числові коефіцієнти

Якщо $a_0 \neq 0$, то цей многочлен називається **многочленом n-го степеня** відносно змінної x Член a_0x^n ($a_0 \neq 0$) називається **старшим членом** многочлена $P(x)$, а a_n — його **вільним членом**	**Приклади** 1. $3x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлен третього степеня 2. $0x^3 + 4x^2 - 6$ — многочлен другого степеня

Тотожно рівні многочлени від однієї змінної

Означення. Два многочлени називаються тотожно рівними, якщо вони набувають рівних значень при всіх значеннях змінної

(іноді тотожна рівність позначається знаком « ≡ »)

Властивості тотожної рівності многочленів від однієї змінної

1. **Якщо многочлен $P(x)$ тотожно** дорівнює нулю (тобто набуває нульових значень при усіх значеннях x), **то всі його коефіцієнти дорівнюють нулю**

$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \text{ (для усіх значень } x)} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = a_1 = ... = a_n = 0}$

2. **Якщо два многочлени** $P(x)$ *і* $Q(x)$ **тотожно** рівні (тобто набувають однакових значень при усіх значеннях x), **то** вони збігаються (тобто **їх степені однакові і коефіцієнти при однакових степенях рівні**)	**Приклад** Якщо відомо, що тотожно рівні многочлени $2x^2 - 5x + b$ і $ax^3 + cx^2 + dx + 1$, то $a = 0$, $c = 2$, $d = -5$, $b = 1$

Ділення многочлена на многочлен

Означення. Якщо для двох многочленів $A(x)$ і $B(x)$ можна знайти такий многочлен $Q(x)$, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то говорять, що $A(x)$ ділиться на $B(x)$ $\boxed{A(x) : B(x)} \Leftrightarrow \boxed{\text{Можно знайти } Q(x)\text{: } A(x) = B(x) \cdot Q(x)}$	**Приклад** Оскільки $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, то многочлен $A(x) = x^2 - 4$ ділиться на многочлен $B(x) = x - 2$ (при діленні дістаємо частку $Q(x) = x + 2$)

Ділення многочлена на многочлен з остачею

Означення. *Многочлен* $A(x)$ *ділиться на многочлен* $B(x)$ *з остачею, якщо можна знайти таку пару многочленів* $Q(x)$ і $R(x)$, *що* $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, *причому степінь остачі* $R(x)$ *менший від степеня* $B(x)$ У разі, коли степінь діленого $A(x)$ менший від степеня дільника $B(x)$, вважають, що неповна частка $Q(x) = 0$ і остача $R(x) = A(x)$ ***Якщо остача $R(x) = 0$, то многочлен $A(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$ (без остачі)***	**Приклад** $\underbrace{x^2 - x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{x}_{Q(x)} + \underbrace{1}_{R(x)}$

Ділення многочлена на многочлен «куточком»

Приклад	Правило ділення многочленів від однієї змінної
Поділити многочлен $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B(x) = x^2 - 2x + 3$ $\begin{array}{r\|l} -\,x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} \quad\quad\quad\quad & \overline{x^2 - 3x - 8} \\ -\,-3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\ \underline{-3x^3 + 6x^2 - 9x} \quad\quad & \\ -\,-8x^2 + 17x - 20 & \\ \underline{-8x^2 + 16x - 24} & \\ x + 4 & \end{array}$	1. Розмістити члени многочленів за спадними степенями змінної. 2. Поділити старший член діленого на старший член дільника. 3. Одержаний результат помножити на дільник і цей добуток відняти від діленого. 4. З одержаною різницею виконують аналогічну операцію: ділять її старший член на старший член дільника і здобутий результат знов множать на дільник і так далі. Цей процес продовжують доти, доки не одержать в остачі нуль (якщо один многочлен ділиться на другий) або *поки в остачі не одержать многочлен, степінь* якого менший від степеня дільника

Результат ділення можна записати так:

$$\underbrace{x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - 2x + 3)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 3x - 8)}_{Q(x)} + \underbrace{x + 4}_{R(x)}$$

Теорема Безу

Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює $P(a)$ **Наслідок** ***Якщо $x = \alpha$ — корінь многочлена $P(x)$ (тобто $P(\alpha) = 0$), то цей многочлен ділиться без остачі на $x - \alpha$***	**Приклад.** Остача від ділення многочлена $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 2$ на двочлен $x - 1$ дорівнює $P(1) = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$, тобто $P(x)$ ділиться на $x - 1$ без остачі. Поділивши $P(x)$ на $x - 1$ «куточком» або за схемою Горнера (див. Додаток, с. 4), одержуємо $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 2 = (x - 1)(2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2)$

Таблиця 16

КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНА ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ФОРМУЛИ ВІЄТА

Означення. Число α називається коренем **многочлена $f(x)$, якщо $f(\alpha) = 0$** **(тобто α є коренем** рівняння $f(x) = 0$)	**Приклад.** Число 3 — корінь многочлена $f(x) = x^4 - 20x - 21$, оскільки $f(3) = 81 - 60 - 21 = 0$

Найпростіші властивості коренів

1. Якщо число α є коренем многочлена $f(x)$, то цей многочлен ділиться на двочлен $x - \alpha$ без остачі — наслідок з теорем Безу (див. табл. 15)	**Приклад.** Оскільки $x = 2$ — корінь многочлена $x^3 + x^2 - 3x - 6$, то цей многочлен ділиться на $x - 2$. (Дійсно, $x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x - 2)(x^2 + 3x + 3)$)
2. ***Многочлен степеня n може мати не більше n коренів***	**Приклад.** Для многочлена $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ коренями є числа: -1, 1, 2. Тоді $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$
3. Якщо для многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ми знаємо n його коренів: α_1; α_2; ...; α_n, то цей многочлен можна розкласти на множники так: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$ (*)	

Формули Вієта	
Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ — корені многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ $(a_0 \neq 0)$, го з тотожності (*) (порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч) одержуємо співвідношення між коренями многочлена та його коефіцієнтами, які називають формулами Вієта	$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \quad (1)$$
При $n = 2$ **для квадратного тричлена** $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ $(a_0 \neq 0)$ маємо $$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$ (див. також табл. 48)	При $n = 3$ **для кубічного многочлена** $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ $(a_0 \neq 0)$ маємо $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$ $$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_2}{a_0}$$ $$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$
Як і для квадратного тричлена (табл. 48), для довільного многочлена справедливе **обернене твердження** Якщо для чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ виконуються співвідношення (1), то ці числа є коренями многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (тобто коренями рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$)	

Таблиця 17

РАЦІОНАЛЬНІ КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНА З ЦІЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Цілі корені	
Нехай задано многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (або рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$) ***Будь-який цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена***	**Приклад**. Розв'яжіть рівняння $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$ **Розв'язання.** Пробуємо знайти цілі корені серед дільників вільного члена (-4), тобто серед чисел $\pm1, \pm2, \pm4$. Послідовно підставляючи ці числа в рівняння, знаходимо, що $x = 2$ — корінь рівняння ($3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 4 = 0$ — правильна рівність). Тоді многочлен $3x^3 - 5x^2 - 4$ ділиться без остачі на $x - 2$ (табл. 15). Виконавши ділення (табл. 15), одержуємо $3x^3 - 5x^2 - 4 = (x - 2)(3x^2 + x + 2)$ і підставляємо цей вираз у початкове рівняння. Маємо $(x - 2)(3x^2 + x + 2) = 0.$ Тоді $x - 2 = 0$ або $3x^2 + x + 2 = 0$. З першого рівняння одержуємо $x = 2$, а друге рівняння дійсних коренів не має ($D < 0$), тому задане рівняння має єдиний дійсний корінь $x = 2$

Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами

Нехай задано многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (або рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$) $(a_0 \neq 0)$ ***Для будь-якого раціонального кореня $x = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ многочлена з цілими коефіцієнтами p є дільник вільного члена (a_n), а q — дільник коефіцієнта при старшому члені (a_0)*** **Наслідок** Якщо коефіцієнт при старшому члені рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює одиниці, то всі раціональні корені цього рівняння (якщо вони існують) — цілі числа	**Приклад.** Розв'яжіть рівняння $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ **Розв'язання.** Пробуємо знайти корінь цього рівняння у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$. Тоді p слід шукати серед дільників вільного члена, тобто серед чисел $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, а q — серед дільників коефіцієнта при старшому члені: $\pm1, \pm2$, тобто раціональні корені многочлена треба шукати серед чисел $\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm2, \pm3, \pm6$. Послідовно підставляючи ці числа в рівняння, знаходимо, що $x = \frac{1}{2}$ — корінь рівняння $(2\ (\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 + 12\ (\frac{1}{2}) - 6$ — правильна рівність). Тоді многочлен $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ ділиться без остачі на $x - \frac{1}{2}$ *(табл. 15).* Виконавши ділення (табл. 15), одержуємо $2x^3 - x^2 + 12x - 6 = (x - \frac{1}{2})(2x^2 + 12)$. Підставляючи цей вираз у початкове рівняння, маємо $(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 12) = 0$. Тоді $x - \frac{1}{2} = 0$ або $2x^2 + 12 = 0$. З першого рівняння одержуємо $x = \frac{1}{2}$, а друге рівняння дійсних коренів не має, тобто задане рівняння має єдиний дійсний корінь $x = \frac{1}{2}$

Таблиця 18

СТЕПЕНІ

Степінь із натуральним показником	
$\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ раз}}}$ $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$	**Приклади.** $3^1 = 3$; $2^4 = 2\ 2 \cdot 2\ 2 = 16$; $(-5)^3 = (-5)\ (-5)\ (-5) = -125$ $\boxed{0^n = 0}$ $\boxed{1^n = 1}$ $n \in N$
Степінь із цілим показником	
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	**Приклади.** $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$ $\boxed{0^0 \text{ — не визначений}}$
$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $a \neq 0$, $n \in N$	**Приклади.** $7^{-1} = \frac{1}{7}$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$ $\boxed{0^{-3} \text{ — не визначений}}$
Степінь із дробовим показником	
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a > 0$, $n \in N$, $n \geq 2$	**Приклади.** $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$; $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ $\boxed{(-8)^{\frac{1}{3}} \text{ — не визначений}}$
$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0$, $n \in N$, $n \geq 2$, $m \in Z$	**Приклади.** $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 2^3 = 8$; $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$

Властивості степенів		
1.	$a^m \ a^n = a^{m+n}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2.	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
3.	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
4.	$(ab)^n = a^n \ b^n$	$a^n \ b^n = (ab)^n$
5.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
6.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
7.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	**Приклад.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$

Таблиця 19

КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ (n — натуральне число, $n \geq 2$)

Означення. Коренем n-го степеня з дійсного числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a	**Означення. Арифметичним коренем** n-го степеня з невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a

Приклади

Формулювання	Обґрунтування	Позначення	Примітка
1 Корінь квадратний з 4 дорівнює 2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	арифметичний корінь
2 Корінь квадратний з 4 дорівнює (–2)	$(-2)^2 = 4$	***позначення немає***	не арифметичний корінь
3. Корінь кубічний з 27 дорівнює 3	$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	арифметичний корінь
4. Корінь п'ятого степеня з (–243) дорівнює (–3)	$(-3)^5 = -243$	$\sqrt[5]{-243} = -3$	не арифметичний корінь

Корінь парного степеня з від'ємного числа не визначений

Знаки $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$, ..., $\sqrt[2k+1]{\ }$ вживають для позначення будь-яких коренів	Знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, ..., $\sqrt[2k]{\ }$ вживають для позначення лише арифметичних (тобто невід'ємних) коренів. Наприклад, $\boxed{\sqrt{a} = b,\ a \geq 0} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$

Терміни: $\sqrt[n]{a}$ — корінь, n — показник кореня, a — підкореневий вираз

Область визначення (у множині дійсних чисел)

Для кореня непарного степеня	Для кореня парного степеня
$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ..., $\sqrt[2k+1]{a}$ — існує при будь-яких значеннях a ($a \in \boldsymbol{R}$)	$\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[2k]{a}$ — існує лише при $\boldsymbol{a \geq 0}$

Таблиця 20

ВЛАСТИВОСТІ КОРЕНІВ *n*-го СТЕПЕНЯ

1. $\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$ **2.** $\boxed{\sqrt[n]{1} = 1}$

3. $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$ — за означенням, причому

$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$ для будь-яких a; $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ лише при $a \ge 0$

4. $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[5]{a^5} = a$, ... , $\boxed{\sqrt[2k-1]{a^{2k+1}} = a}$

5. $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, ... , $\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \ge 0 \\ -a, & \text{якщо } a \ge 0 \end{cases}}$

6. $\boxed{(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$ — для всіх a з області визначення виразу $\sqrt[n]{a}$

7. Корінь з кореня	**8. Корінь з степеня**
$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$ — для всіх a з області визначення виразу $\sqrt[nk]{a}$	При $a > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$

9. Корінь із добутку і частки

Область застосування формул	**Формули**	**Приклади**
Для невід'ємних a і b ($a \ge 0$; $b \ge 0$)	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(b \ne 0)$	$\sqrt[3]{27\ 8} = \sqrt[3]{27}\ \sqrt[3]{8} = 3\ 2 = 6$ $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2}$
Для будь-яких a і b	корінь непарного степеня	
	$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a}\ \sqrt[2k+1]{b}$ $\sqrt[2k+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}}$ $(b \ne 0)$	$\sqrt[5]{a^5b^5} = \sqrt[5]{a^5}\ \sqrt[5]{b^5} = ab$ $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$
	корінь парного степеня	
	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a\rvert}\ \sqrt[2k]{\lvert b\rvert}$, де $ab \ge 0$ $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}}$, де $\frac{a}{b} \ge 0,\ b \ne 0$	$\sqrt{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{5})} =$ $= \sqrt{\lvert 1-\sqrt{3}\rvert}\ \sqrt{\lvert 1-\sqrt{5}\rvert} =$ $\sqrt{\sqrt{3}-1}\ \sqrt{\sqrt{5}-1}$

10. Основна властивість коренів

При $a \ge 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$ і навпаки $\boxed{\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Значення кореня з степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те ж саме натуральне число

Особливості використання основної властивості для будь-яких значень a

Множення показників

Область застосування формул	Формули	Приклади
***m* і *n* — обидва непарні, а *k*— парне**	$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}}, \text{ якщо } a \ge 0 \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}}, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[6]{(-2)^2} = -\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[5]{1-\sqrt{2}} = -\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^2}$
У решті випадків	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[9]{8}$; $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[9]{-8}$

Ділення показників

Хоча б одне з чисел n або k — парне	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, \text{ якщо } m \text{ — парне} \\ \sqrt[n]{\lvert a \rvert^m}, \text{ якщо } m \text{ — непарне} \end{cases}$ Зокрема, $\boxed{\text{якщо } k \text{ — парне, то } \sqrt[k]{a^{mk}} = \lvert a^m \rvert}$	$\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^6} =$ $= \sqrt[5]{(\lvert 1-\sqrt{2} \rvert)^3} = \sqrt[5]{(\sqrt{2}-1)^3}$; $\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^4} = \sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^2}$
***n* і *k* — обидва непарні**	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[15]{(1-\sqrt{2})^9} = \sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^3}$

11. Винесення множника з-під знаку кореня

Для невід'ємних а і b ($a \ge 0$, $b \ge 0$)	$\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$
Для довільного а	*корінь непарного степеня*	
	$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1} b} = a\sqrt[2k+1]{b}$	$\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3} = -2 \cdot \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^5 \cdot 7} = (1-\sqrt{2})\sqrt[5]{7}$
	корінь парного степеня	
	$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k} b} = \lvert a \rvert \sqrt[2k]{b}}$, де $b \ge 0$	$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4 \cdot 7} = \lvert 1-\sqrt{2} \rvert \cdot \sqrt[4]{7} = (\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{7}$

12. Внесення множника під знак кореня

Для невід'ємних а і b ($a \ge 0$, $b \ge 0$)	$\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$	$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$
Для довільного а	*корінь непарного степеня*	
	$a\sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1} b}$	$(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3 \cdot 7}$
	корінь парного степеня	
	$\boxed{a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k} b}, \text{ якщо } a \ge 0 \\ -\sqrt[2k]{a^{2k} b}, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}}$, де $b \ge 0$	$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 45$; $(1-\sqrt{2})\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4 \cdot 7}$

Таблиця 21

ЛОГАРИФМИ

Означення. Логарифмом додатного числа b ($b > 0$) за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b	**Приклади.** 1. $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$; 2. $\log_5\sqrt{5} = \frac{1}{2}$, оскільки $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Позначення	**Спеціальні позначення**	
	Десятковий логарифм	**Натуральний логарифм**
$\boxed{\log_a b}$	$\log_{10} b = \lg b$	$\log_e b = \ln b$ $(e \approx 2{,}7182...)$

Основна логарифмічна тотожність

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$	**Приклади.** 1. $5^{\log_5 7} = 7$; 2. $10^{\lg 3} = 3$

Властивості і формули логарифмування ($a > 0$; $a \neq 1$; $x > 0$; $y > 0$)

1.	$\log_a 1 = 0$	Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю
2.	$\log_a a = 1$	
3.	$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників
4.	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника
5.	$\log_a x^n = n \log_a x$	Логарифм степеня додатного числа дорівнює добуткові показника степеня на логарифм основи цього степеня

Узагальнені формули логарифмування

1. $\boxed{\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|}$, де $xy > 0$
2. $\boxed{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|}$, де $\frac{x}{y} > 0$
3. $\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|}$, де $x \neq 0$, $k \in Z$

Формула переходу від однієї основи логарифма до іншої

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (b > 0;\ a > 0;\ a \neq 1;\ c > 0;\ c \neq 1)$$

Наслідки

1.	2.	3.
$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$	$\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k}$	$\boxed{\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}}$
$a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $b \neq 1$	$a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$	$a > 0$; $a \neq 1$

Таблиця 22

ПОСЛІДОВНОСТІ. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Поняття послідовності	Приклади
Послідовність — змінна величина, що залежить від натурального числа (тобто функція натурального аргументу) **Запис.** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n$ — члени (елементи) послідовності) *Якщо елементи — дійсні числа, то послідовність називається числовою. Вона визначена, якщо вказано закон, за яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність дійсне число a_n*	**1.** 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... — послідовність парних натуральних чисел **2.** –1, –2, –3, –4, –5, –6, ... — послідовність цілих від'ємних чисел **3.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ — послідовність чисел, обернених до натуральних **4.** 2, –2, 2, –2, ... — числова послідовність

Зростаючі та спадні послідовності

Послідовність називається **зростаючою**, якщо кожний її наступний член більший від попереднього: $a_{n+1} > a_n$ **для всіх** $n \in N$ (перша послідовність)	Послідовність називається **спадною**, якщо $a_{n+1} < a_n$ **для всіх** $n \in N$ (друга та третя послідовності)

Підсумовування (див. також табл. 23)

Якщо можливо, подати кожний член послідовності у вигляді різниці $a_k = \varphi(k) - \varphi(k+1)$ (де $\varphi(x)$ – якась функція), потім підставити $k = 1; 2; 3; \ldots; n$ і додати одержані рівності	**Приклад**. Знайти суму перших n членів послідовності $\frac{1}{1\cdot 2}; \frac{1}{2\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 4}; \ ; \frac{1}{n(n+1)}; \ldots$ **Розв'язання.** Довільний член $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ цієї послідовності можна записати так: $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$ (тут $\varphi(x) = \frac{1}{x}$). При $k = 1; 2; 3; \ldots; n$ одержуємо $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \ ; \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$ Додаючи почленно одержані рівності, маємо $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ + \frac{1}{n(n+1)} =$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$ $= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Метод математичної індукції

Використовується для доведення тверджень $A(n)$ про числові послідовності або про вирази, що залежать від натурального числа, у формулюванні яких явно чи неявно присутні слова **«для будь-якого натурального n»**

Схема доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції	**Приклад. Довести:** $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
1. **Перевіряємо**, чи виконується дане твердження **при $n = 1$** (іноді починають з $n = p$)	**Розв'язання.** Для **зручності** запису позначимо $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1)$ 1. При $n = 1$ рівність **виконується** $\left(1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3\right.$, тобто $\left.2 = 2\right)$
2. **Припускаємо**, що задане твердження справедливе **при $n = k$**, де $k \geq 1$ (другий варіант — при $n \leq k$)	2. Припускаємо, що задана рівність правильна при $n = k$, де $k \geq 1$, тобто $S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$ (*)
3. **Доводимо** (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і **при $n = k + 1$**.	3. Доведемо, що рівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$. Враховуючи, що $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$ і підставляючи S_k з (*), одержуємо $S_{k+1} = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$, що й потрібно було довести
4. **Робимо висновок**, що дане твердження справедливе для будь-якого натурального числа n (для будь-якого $n \geq p$)	4. Отже, задана рівність правильна для будь-якого натурального n

Таблиця 23

ПРОГРЕСІЇ

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
Означення. Арифметичною прогресією називається числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого **додають** одне й те саме число	**Означення.** Геометричною прогресією називається числова послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, **помноженому** на одне й те ж саме не рівне нулю число
Це постійне для даної послідовності число d називається **різницею арифметичної прогресії**	Це постійне для даної послідовності число q називається **знаменником геометричної прогресії**
Приклади	
$2, 5, 8, 11, 14, ...$ — зростаюча арифметична прогресія ($d = 3 > 0$) $18, 13, 8, 3, -2, ...$ — спадна арифметична прогресія ($d = -5 < 0$)	$2, 6, 18, 54, 162, ...$ ($q = 3$); $16, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, ...$ $\left(q = -\frac{1}{4}\right)$ — геометричні прогресії
Позначення	
$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ — арифметичена прогресія	$b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ — геометрична прогресія
$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$ — **різниця прогресії**	$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ — знаменник прогресії

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
Характеристичні властивості	
$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ — арифметична прогресія $\Leftrightarrow$ $\boxed{a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$	$b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ — геометрична прогресія $\Leftrightarrow$ $\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$
Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному попереднього і наступного членів *і навпаки; якщо виконується зазначена властивість, то послідовність буде арифметичною прогресією*	***Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії (починаючи з другого члена) дорівнює добуткові попереднього і наступного членів*** *і навпаки; якщо виконується зазначена властивість, то послідовність буде геометричною прогресією*
Формули n-го члена	
1. $a_n = a_{n-1} + d$ (за означенням) 2. $\mathbf{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}$	1. $b_n = b_{n-1} \cdot q$ (за означенням) 2. $\mathbf{b_n = b_1\, q^{n-1}}$
Формули суми n перших членів	
1. $S_n = \dfrac{\mathbf{a_1 + a_n}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{n}$ 2. $S_n = \dfrac{2a_1 + d\,(n - 1)}{2} \cdot n$	1. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1} = \dfrac{b_1 - b_n q}{1 - q}$ 2. $S_n = \dfrac{\mathbf{b_1\,(q^n - 1)}}{\mathbf{q - 1}} = \dfrac{\mathbf{b_1\,(1 - q^n)}}{\mathbf{1 - q}}$

Орієнтовний план розв'язування задач на прогресії

1. ***Все****, про що говориться в умові задачі (члени прогресії, їх суми тощо),* ***виражаємо через перший член і різницю (або знаменник) прогресії.***
2. ***Складаємо рівняння*** *(чи систему рівнянь)* ***за умовою задачі.*** *У випадку, коли в задачі відбувається перехід від геометричної прогресії до арифметичної і навпаки, для складання рівнянь звичайно використовують характеристичні властивості прогресій*

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Означення	Приклади
Нескінченна геометрична прогресія, знаменник якої за модулем менший від одиниці ($\lvert q \rvert < 1$), називається нескінченно спадною геометричною прогресією	$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots\ \left(q = \frac{1}{2}\right)$ $-2;\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{9};\ \frac{2}{27};\ -\frac{2}{81};\ \frac{2}{243};\ \ldots\ \left(q = -\frac{1}{3}\right)$

Сума нескінченно спадної геометричної прогресії

Означення. Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається границя, до якої прямує сума n її перших членів, при нескінеченному зростанні n ($n \to \infty$)

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Формула для обчислення	Приклад
$\boxed{S = \dfrac{b_1}{1 - q}}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Перетворення періодичного десяткового дробу на звичайний

Приклад. $0{,}(6) = 0{,}6666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \dfrac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$ (як сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = \frac{6}{10}$ і знаменником $q = \frac{1}{10}$)

Таблиця 24

ФУНКЦІЯ

Означення. Залежність змінної y від змінної x називається **функцією**, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y	**Означення. Числовою функцією** з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y, що звичайно позначається $y = f(x)$
Функція позначається або однією буквою f (або $f(x)$), або рівністю $y = f(x)$	**Терміни:** x — незалежна змінна, або аргумент, y — залежна змінна, або функція, $f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0

Область визначення і множина значень функції

Область визначення функції (D) — множина тих значень, які може приймати аргумент (див. також табл 25).	**Множина значень функції** (E) — це множина тих значень, яких може набувати сама функція при всіх значеннях аргументу з області визначення **(це всі значення a, при яких рівняння $f(x) = a$ має розв'язки)**

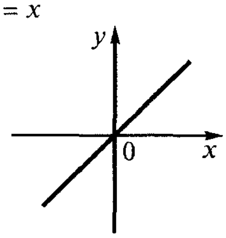
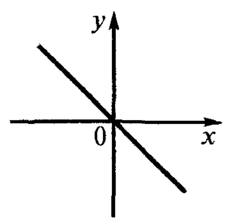
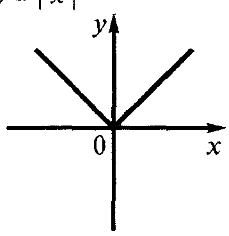
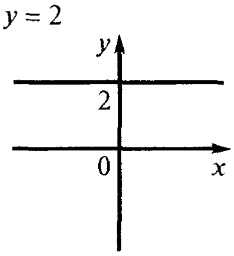
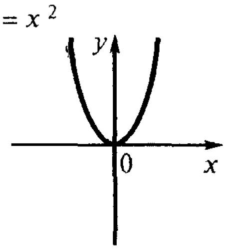
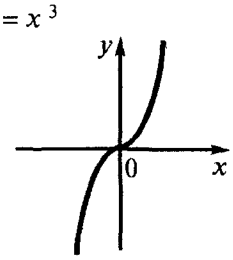
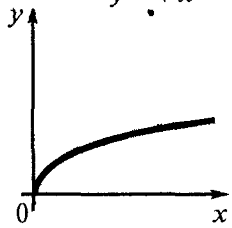
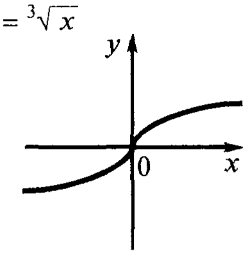
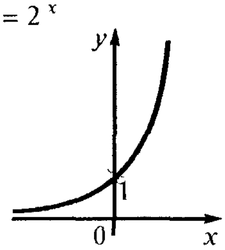
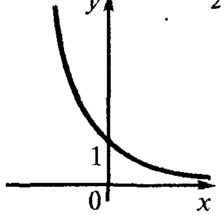
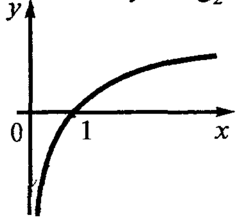
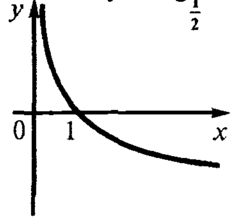
Приклад. $f(x) = \sqrt{x-1}$

Область визначення (О.В.): $x - 1 \geq 0$, тобто $x \in [1; +\infty)$ $(\boldsymbol{D_f} = \mathbf{[1; +\infty)})$	Множина значень: $[0; +\infty)$ $\boldsymbol{E_f} = \mathbf{[0; +\infty)}$ (оскільки $f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0$ для всіх $x \in D_f$ і набуває всіх значень від 0 до $+\infty$)

Графік функції

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції f (а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x)

Графіки деяких елементарних функцій

$y = x$ 	$y = -x$ 	$y = \lvert x \rvert$ 	$y = 2$ 
$y = x^2$ 	$y = x^3$ 	$y = \sqrt{x}$ 	$y = \sqrt[3]{x}$ 
$y = 2^x$ 	$y = (\frac{1}{2})^x$ 	$y = \log_2 x$ 	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 

Таблиця 25

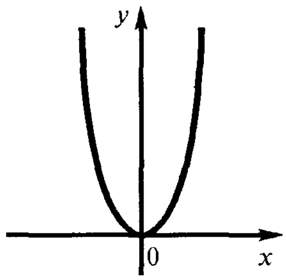
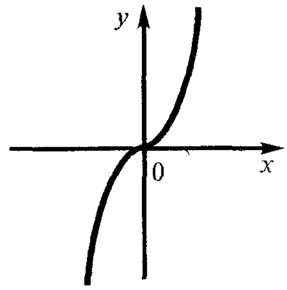
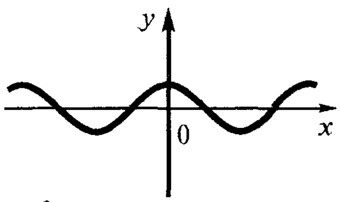
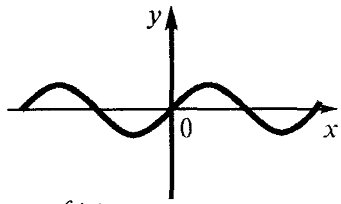
ЯК ЗНАЙТИ ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

■ □	Вид функції	Обмеження ($f(x)$ і $g(x)$ існують!)	Формулювання
1	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменник дробу не дорівнює нулю
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$	Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз
4	$y = \log_{f(x)} a \quad (a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (k — ціле)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$	Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює πk (k — ціле)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leq 1$	Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbf{R}$		
	а) α — натуральне	x — будь-яке	
	б) α — ціле від'ємне або нуль	$x \neq 0$	
	в) α — додатне не ціле число	$x \geq 0$	
	г) α — від'ємне не ціле число	$x > 0$	

Таблиця 26

ПАРНІ І НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

Парна функція	Непарна функція
Означення. Функція f називається **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$	**Означення.** Функція f називається **непарною**, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$
Властивість	**Властивість**
Графік парної функції симетричний відносно осі 0у	***Графік непарної функції симетричний відносно початку координат***

Приклади парних функцій	Приклади непарних функцій
$y = x^2$  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$	**$y = x^3$**  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
$y = \cos x$  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$	**$y = \sin x$**  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Таблиця 27

ЗРОСТАЮЧІ І СПАДНІ ФУНКЦІЇ

Зростаюча функція	Спадна функція
Означення. Функція f називається **зростаючою** на деякій множині P, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції **$f(x)$ — зростає,** якщо для будь-яких $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$	**Означення.** Функція f називається **спадною** на деякій множині P, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції **$f(x)$ — спадає,** якщо для будь-яких $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
Властивості	
1. Якщо функція f зростає на деякій множині P, то більшому значенню функції відповідає **більше** значення аргументу з цієї множини $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ — зростає (на } P) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}} \Rightarrow \boxed{x_1 > x_2}$	1. Якщо функція f спадає на деякій множині P, то більшому значенню функції відповідає **менше** значення аргументу з цієї множини $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ — спадає (на } P) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}} \Rightarrow \boxed{x_1 < x_2}$
2. ***Сума кількох зростаючих на даній множині функцій є зростаючою функцією на цій множині***	2. ***Сума кількох спадних на даній множині функцій є спадною функцією на цій множині***
3. Якщо функція f зростає, то обернена до неї функція також зростає	3. Якщо функція f спадає, то обернена до неї функція також спадає

Зростання і спадання деяких складених функцій (функцій від функцій)

4. Якщо у складеній функції $y = f(u(x))$ функція $u = u(x)$ зростає і функція $y = f(u)$ зростає, то і функція $y = f(u(x))$ зростає. Коротше: ***композиція (тобто результат послідовного застосування) двох зростаючих функцій — зростаюча функція***

4. Якщо у складеній функції $y = f(u(x))$ функція $u = u(x)$ спадає і функція $y = f(u)$ спадає, то і функція $y = f(u(x))$ спадає. Коротше: ***композиція (тобто результат послідовного застосування) двох спадних функцій — спадна функція***

5. ***Композиція (тобто результат послідовного застосування) зростаючої і спадної функцій (або спадної і зростаючої) є функція спадна***

Властивість, корисна для розв'язування деяких рівнянь

6. ***Будь-яка зростаюча (або спадна) на заданій множині функція набуває кожного свого значення лише в одній точці з цієї множини***

$f(x)$ — зростаюча (або спадна) функція
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x + 2^x = 3$

Розв'язання. $f(x) = x + 2^x$ — зростаюча функція (як сума двох зростаючих функцій), тому значення, що дорівнює 3, вона може набувати лише в одній точці. Ця точка — 1 (оскільки $1 + 2^1 = 3$). Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 1$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$

Розв'язання. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ — спадна функція (як сума двох спадних функцій), тому значення, що дорівнює 2, вона може набувати лише в одній точці. Ця точка — 0 (оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2$). Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 0$

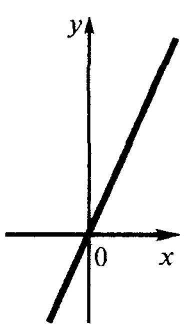
Ознака зростання функції

Якщо $f'(x) > 0$ в кожній точці інтервалу I, то функція f зростає на цьому інтервалі

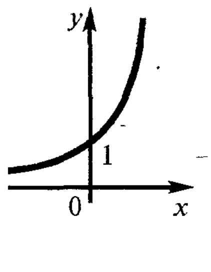
Ознака спадання функції

Якщо $f'(x) < 0$ в кожній точці інтервалу I, то функція f спадає на цьому інтервалі

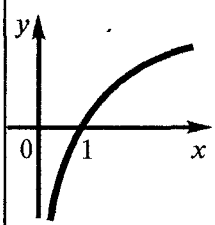
Приклади функцій, що зростають на всій області визначення



$y = ax$ $(a > 0)$

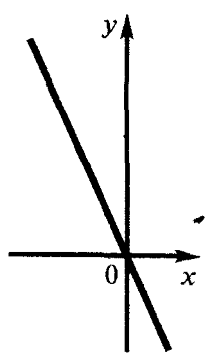


$y = a^x$ $(a > 1)$

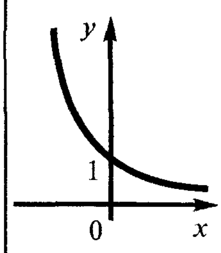


$y = \log_a x$ $(a > 1)$

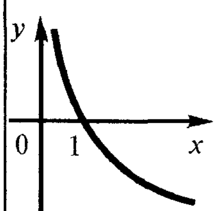
Приклади функцій, що спадають на всій області визначення



$y = ax$ $(a < 0)$



$y = a^x$ $(0 < a < 1)$



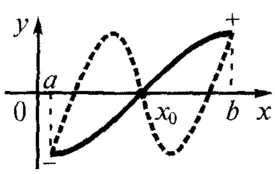
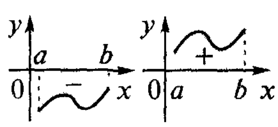
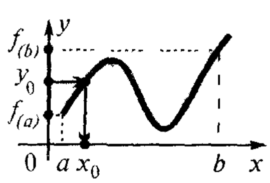
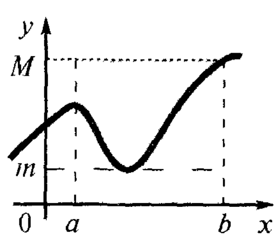
$y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$

Таблиця 28

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

У точці	На проміжку
Означення. Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці** a, якщо при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$, тобто $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$	**Означення.** Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають **неперервною на проміжку** I У шкільному курсі математики: **Графік функції, неперервної на проміжку — неперервна лінія на цьому проміжку**

Властивості

Ілюстрація	Формулювання	Приклад використання
	1. Якщо неперервна на *відрізку [a, b] функція набуває на кінцях цього відрізка значень різних знаків, то в деякій точці цього відрізка вона набуває значення, яке дорівнює нулю*	$f(x) = 4x^3 + x - 1$ — неперервна функція (многочлен) $f(0) = -1 < 0$; $f(1) = 4 > 0$, тому на интервалі (0; 1) існує точка x, в якій функція дорівнює 0 (це точка $x_0 = \frac{1}{2}$)
	2. *Якщо на інтервалі (a, b) функція f (x) неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі функція зберігає постійний знак*	Метод інтервалів розв'язування нерівностей вигляду $f(x) \gtrless 0$ (див. табл. 40 і Додаток, с. 25)
	3. Функція $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, набуває всіх проміжних значень між значеннями цієї функції у крайніх точках, тобто між $f(a)$ і $f(b)$	$f(x) = 2^x$ — неперервна функція. Якщо $x \in [2;3]$, то $2^2 = 4$, $2^3 = 8$. Оскільки $4 < 5 < 8$, то існує точка x_0, в якій $f(x_0) = 2^{x_0} = 5$ (як відомо, $x_0 = \log_2 5$)
	4. Функція $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі два числа m і M, що для всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $m \le f(x) \le M$	Правило знаходження найбільшого і наименшого значень функції на відрізку $[a, b]$ (див. табл. 74)

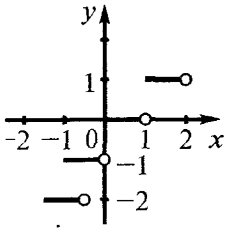
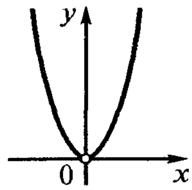
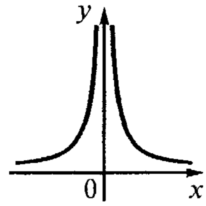
5. Сума, різниця і добуток неперервних на даному інтервалі функцій — неперервна на тому ж самому інтервалі функція. Частка двох неперервних функцій — неперервна функція в усіх точках, в яких знаменник не перетворюється на нуль

6. Функція, обернена до неперервної функції на заданому інтервалі, є неперервною на цьому інтервалі

7. Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці

Точки розриву

Точка a — це **точка разриву функції $f(x)$** (та її графіка), якщо в точці a не виконується умова, що **при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$**

Приклади функцій, що містять точки розриву		
$y = [x]$ — ціла частина x  Точки розриву — усі цілочислові точки	$y = \frac{x^3}{x}$  0 — точка розриву	$y = \frac{1}{x^2}$  0 — точка розриву

Таблиця 29

ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ

Означення. Функція f називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення числа $x + T$ і $x - T$ також входять до області визначення і
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Властивості

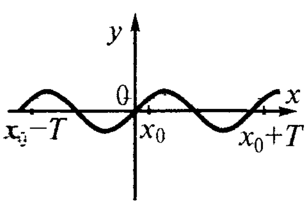
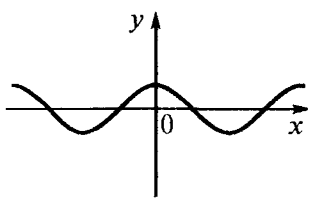
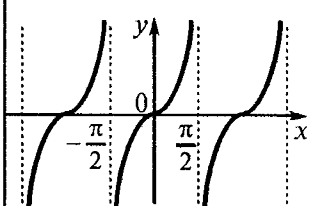
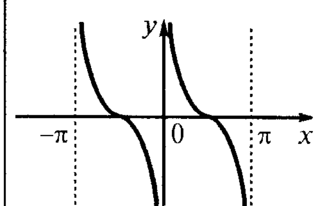
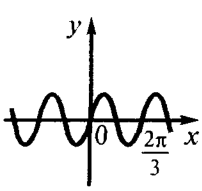
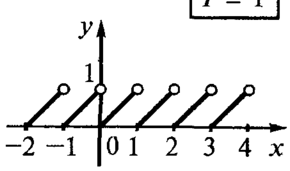
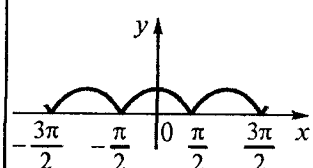
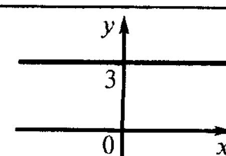
1. Якщо число T — період функції f, то число $k \cdot T$ ($k \in N$) також є періодом цієї функції

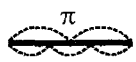
2. ***Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = Af(kx + b)$ також є періодичною і її період дорівнює $\frac{T}{|k|}$ (A, k, b — постійні числа і $k \neq 0$)***

3. Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то складена функція (функція від функції) $y = \varphi(f(x))$ є також періодичною з періодом T (хоч, можливо, цей період і не є найменшим за абсолютною величиною)

4. ***Для побудови графіка періодичної функції з періодом T ($T > 0$) досить побудувати графік на відрізку довжиною T, а далі — паралельно перенести цей графік уздовж осі $0x$ на відстань nT ($n \in N$) ліворуч і праворуч***

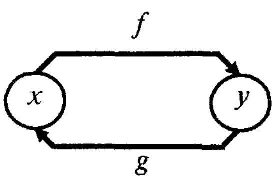
Приклади періодичних функцій

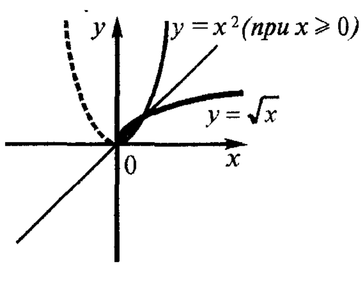
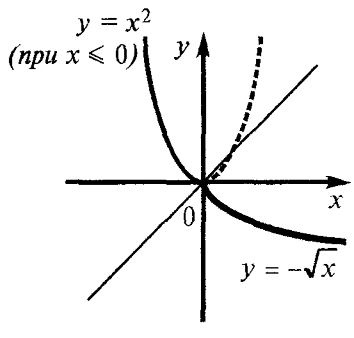
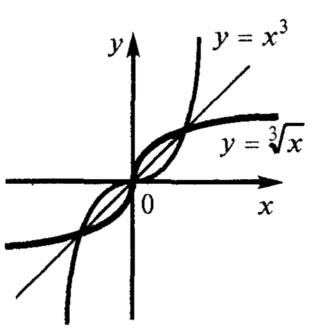
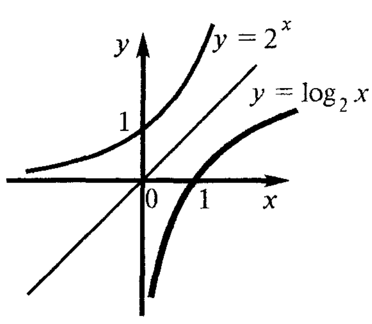
$y = \sin x$ $\boxed{T = 2\pi}$ 	$y = \cos x$ $\boxed{T = 2\pi}$ 	$y = \mathrm{tg}\, x$ $\boxed{T = \pi}$ 	$y = \mathrm{ctg}\, x$ $\boxed{T = \pi}$ 
$y = \sin 3x$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{3}}$ 	$y = \{x\}$ — дробова частина x $\boxed{T = 1}$ 	$y = \lvert\cos x\rvert$ $\boxed{T = \pi}$ 	$y = 3$ $\boxed{T \text{— будь-яке число } (T \neq 0)}$ 

Практичний прийом знаходження періодів функцій	
1. Знайти період кожної складової функції, яка входить у запис заданої функції	**Приклад 1.** $f(x) = \underbrace{\sin 4x}_{T_1 = \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{tg} 3x}_{T_2 = \frac{\pi}{3}}$  $\boxed{T_f = \pi} = 2T_1 = 3T_2$
2. Підібрати інтервал (якщо це можливо), всередині якого кожний із знайдених періодів укладається ціле число разів. Довжина цього інтервалу і буде періодом заданої функції (хоч, можливо, і не найменшим за абсолютною величиною)	**Приклад 2.** $g(x) = \underbrace{\sqrt{\cos \frac{3x}{2}}}_{T_1 = \frac{4\pi}{3}} \cdot \underbrace{\lg(\operatorname{ctg} x)}_{T_2 = \pi}$  $\boxed{T_g = 4\pi} = 3T_1 = 4T_2$

Таблиця 30

ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

$y = f(x)$  $\boxed{g(f(x)) = x}$ $\boxed{f(g(y)) = y}$	**Поняття оберненої функції.** Нехай функція $f(x)$ приймає кожне своє значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається оборотною). Тоді для кожного числа y_0 (з множини значень функції f) існує єдине значення x_0 (з області визначення функції f), таке, що $f(x_0) = y_0$. Розглянемо нову функцію g, яка кажному числу y_0 ставить у відповідність число x_0, тобто $g(y_0) = x_0$. У цьому випадку функція g називається оберненою до функції f (а функція f — оберненою до функції g)

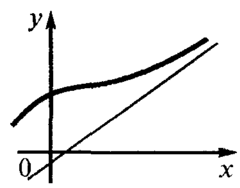
Властивості	Приклади обернених функцій	
1. Область визначення прямої функції є множиною значень оберненої, а множина значень прямої функції — областю визначення оберненої $\boxed{D_f = E_g}$ $\boxed{E_f = D_g}$		
2. Якщо функція зростає (спадає) на деякому інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, яка зростає, якщо пряма функція зростає, і спадає, якщо пряма функція спадає 3. ***Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої y = x (бісектриси першого і третього координатних кутів)***		

Практичний прийом знаходження аналітичного запису оберненої функції для функції $y = f(x)$	
1 З рівності $y = f(x)$ виразити x через y (на кожному з проміжків, де функція $y = f(x)$ зростає або спадає) 2 В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y	**Приклад.** Знайти обернену функцію для функції $y = x^2 - 2x$ **Розв'язання.** З'ясуємо, де задана функція зростає і спадає $y' = 2x - 2$. Тоді $y' > 0$ при $x > 1$ — функція зростає і $y' < 0$ при $x < 1$ — функція спадає. На кожному з цих проміжків: $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$ запишемо формулу оберненої функції. Оскільки $y = x^2 - 2x$, то $x^2 - 2x - y = 0$. Звідси $x = 1 \pm \sqrt{1+y}$, тобто при $x > 1$ $x = 1 + \sqrt{1+y}$, а при $x < 1$ $x = 1 - \sqrt{1+y}$. Змінюючи позначення на традіційне, дістаємо: для функції $y = x^2 - 2x$ при $x > 1$ (і при $x \geq 1$) оберненою функцією буде функція $y = 1 + \sqrt{1+x}$, а при $x < 1$ (і при $x \leq 1$) оберненою функцією буде функція $y = 1 - \sqrt{1+x}$

Таблиця 31

АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Означення. Асимптота кривої — це пряма, до якої необмежено наближається крива при віддаленні її в нескінченність

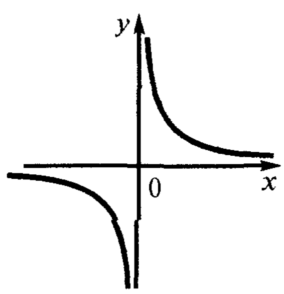
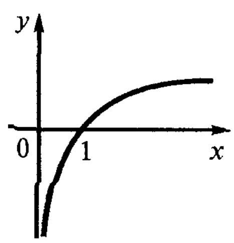
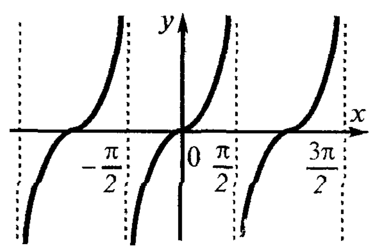


Вертикальні асимптоти ($x = a$)

$x = a$ — ***вертикальна асимптота***
при $x \to a$ $f(x) \to \infty$

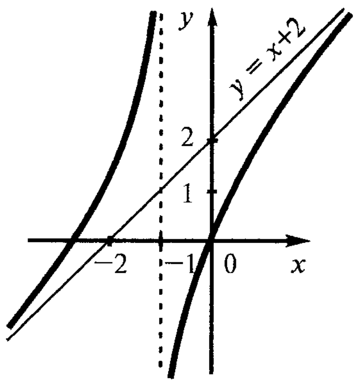
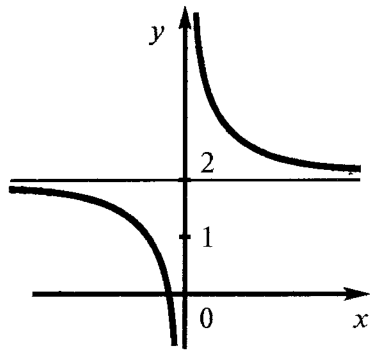
Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a, якщо точка a обмежує відкриті проміжки області визначення даної функції і біля точки a функція прямує до нескінченності

Приклади вертикальних асимптот

$y = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y = \operatorname{tg} x$
О.В. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ **При** $x \to 0$ (справа) $y \to +\infty$ **При** $x \to 0$ (зліва) $y \to -\infty$ $x = 0$ — вертикальна асимптота	О.В. $x \in (0; +\infty)$ При $x \to 0$ (справа) $y \to -\infty$ $x = 0$ — вертикальна асимптота	О.В. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ При $x \to \frac{\pi}{2}$ (зліва) $y \to +\infty$ При $x \to \frac{\pi}{2}$ (справа) $y \to -\infty$ $x = \frac{\pi}{2}$ — вертикальна асимптота ($x = \frac{\pi}{2} + \pi k$)
		

Похилі і горизонтальні асимптоти ($y = kx + b$)

1. ***Якщо $f(x)$ — дробово-раціональна функція, в якій степінь чисельника на одиницю більший від степеня знаменника, то виділяємо цілу частину і використовуємо означення асимптоти***

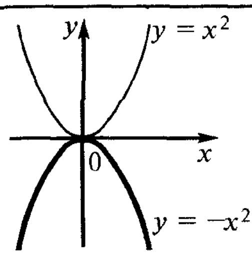
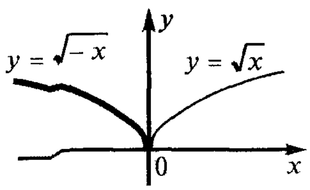
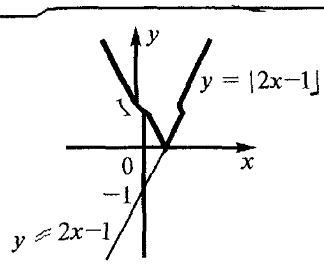
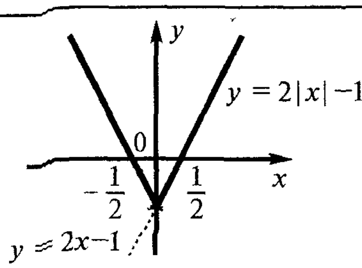
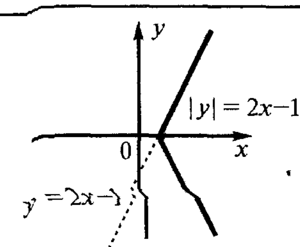
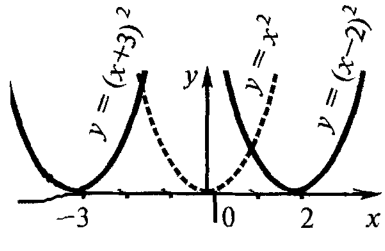
Приклад 1	**Приклад 2**
$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$ При $x \to \infty$ $\frac{1}{x + 1} \to 0$, тобто $f(x) \to x + 2$, тоді $y = x + 2$ — похила асимптота (крім того, $x = -1$ — вертикальна асимптота — див. графік)  	$f(x) = \frac{2x + 1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ При $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, тобто $f(x) \to 2$, тоді $y = 2$ — горизонтальна асимптота (крім того, $x = 0$ — вертикальна асимптота — див. графік) 

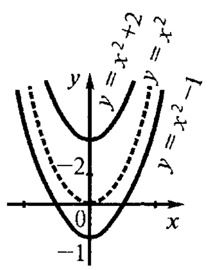
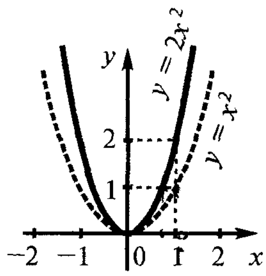
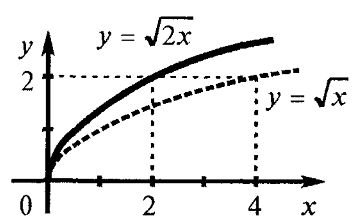
2. ***У загальному випадку рівняння похилих і горизонтальних асимптот $y = kx + b$ можуть бути одержані з використанням формул***

$$\boxed{k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)}$$

Для прикладу 1	**Для прикладу 2**
$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 (1 + \frac{3}{x})}{x^2 (1 + \frac{1}{x})} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + \frac{3}{x})}{(1 + \frac{1}{x})} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x) =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$ $y = kx + b = x + 2$ — похила асимптота	$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$ $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} (\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2$ $y = kx + b = 0x + 2 = 2$ — горизонтальна асимптота

Таблиця 32

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x)$			
№ п/п	**Формула залежності**	**Приклад**	**Перетворення**
1	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі $0x$
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі $0y$
3	$y = \lvert f(x) \rvert$		Вище від осі $0x$ (і на самій осі) — без зміни, нижче від осі $0x$ — симетрія відносно осі $0x$
4	$y = f(\lvert x \rvert)$		Праворуч від осі $0y$ (і на самій осі) — без зміни і ця ж сама частина — симетрія відносно осі $0y$
5	$\lvert y \rvert = f(x)$		Вище від осі $0x$ (і на самій осі) — без зміни і ця ж сама частина — симетрія відносно осі $0x$
6	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення вздовж осі $0x$ на a одиниць

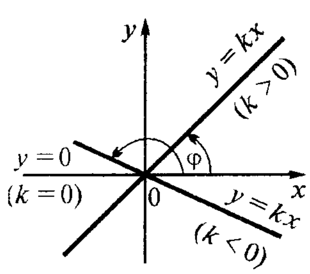
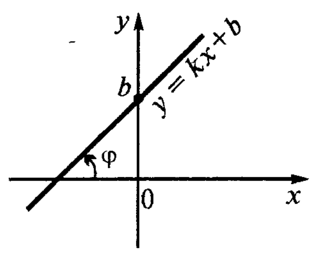
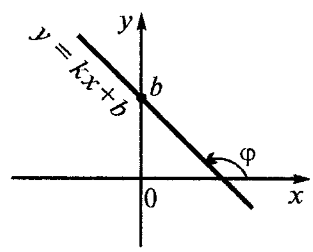
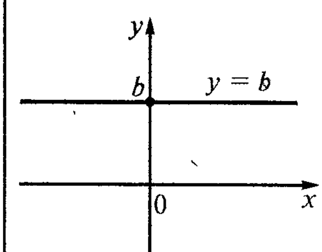
№ п/п	Формула залежності	Приклад	Перетворення
7	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення вздовж осі $0y$ на c одиниць
8	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Той самий вигляд, що й у графіка $y = f(x)$, тільки розтягнуто або стиснено вздовж осі $0y$ (при $k > 1$ розтягнуто, при $0 < k < 1$ стиснено)
9	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Той самий вигляд, що й у графіка $y = f(x)$, тільки разтягнуто або стиснено вздовж осі $0x$ (при $\alpha > 1$ стиснено, при $0 < \alpha < 1$ розтягнуто)

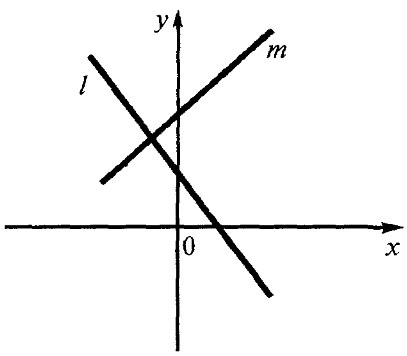
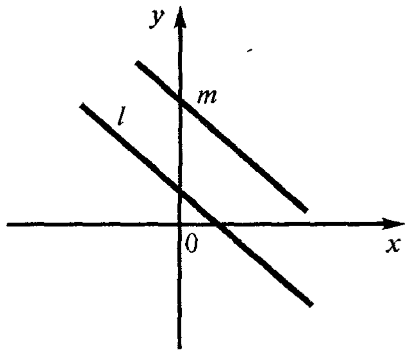
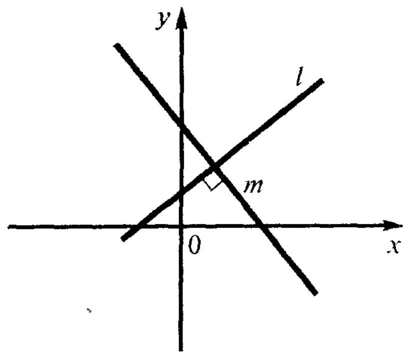
Таблиця 33

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ГРАФІК	
Означення. Лінійною функцією називають функцію вигляду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа	
Властивості	
1. *Область визначення* (D_y)	$x \in \boldsymbol{R}$ $(D_y = R)$
2. *Множина значень* (E_y)	1) при $k \neq 0$ $E_y = (-\infty; +\infty)$ 2) при $k = 0$ $y = b$
3 *Парність, непарність*	1) при $k \neq 0$ і $b \neq 0$ — функція ні парна, ні непарна 2) при $k = 0$ — парна 3) при $b = 0$ і $k \neq 0$ — непарна

4. *Точки перетину з осями координат*	$\boxed{\begin{array}{c}0x\\ y=0\end{array}}$ 1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$ — точка перетину з віссю $0x$ 2) $k = 0$, тоді $y = b$ — пряма, яка паралельна осі $0x$ при $b \neq 0$ і збігається з віссю $0x$ при $b = 0$ $\boxed{\begin{array}{c}0y\\ x=0\end{array}}$ $y = b$ — точка перетину з віссю $0y$
5. *Неперервність і диференційовність*	Лінійна функція неперервна і диференційовна на всій числовій прямій $y' = (kx + b)' = k$
6. *Зростання і спадання*	1) при $\boldsymbol{k > 0}$ ($y' > 0$) функція **зростає** на всій числовій прямій 2) при $\boldsymbol{k < 0}$ ($y' < 0$) функція **спадає** на всій числовій прямій 3) при $\boldsymbol{k = 0}$ ($y' = 0$) функція **стала**
7. ***Графіком лінійної функції завжди є пряма,*** *тангенс кута нахилу цієї прямої до осі 0x дорівнює k (кут відлічується від додатного напряму осі 0x проти годинникової стрілки)* $\boxed{k \text{ — кутовий коефіцієнт прямої } y = kx + b}$	1) при $b = 0$ ($y = kx$) — пряма, що проходить через початок координат 2) при $b \neq 0$ ($y = kx + b$) — пряма, що не проходить через початок координат (її можна одержати з прямої $y = kx$ паралельним перенесенням вздовж осі $0y$ на b одиниць)

Графіки лінійних функцій

$\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{b \neq 0}$ $(\boldsymbol{y = kx + b})$		
$(\boldsymbol{y = kx})$	$\boldsymbol{k > 0}$	$\boldsymbol{k < 0}$	$\boldsymbol{k = 0}$
$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} 0}$
			

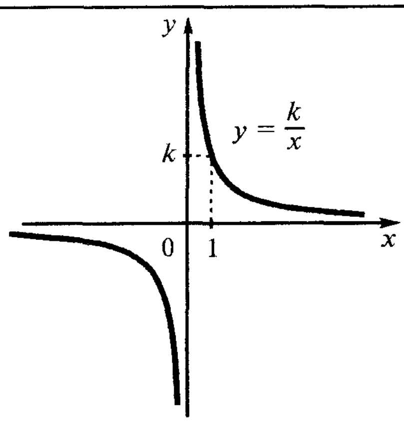
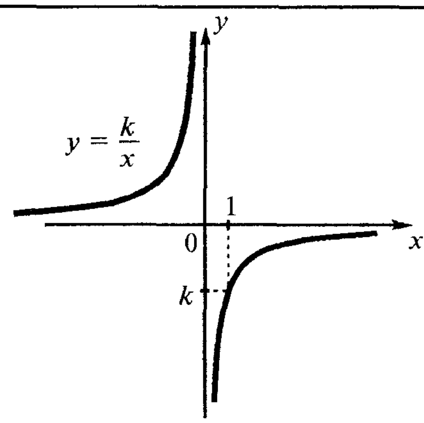
Взаємне розміщення графіків лінійних функцій		
Умова перетину прямих	**Умова паралельності прямих**	**Умова перпендикулярності прямих**
$y = k_1x + b_1$ — пряма l; $y = k_2x + b_2$ — пряма m		
		
Якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі l і m перетинаються в одній точці	$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Таблиця 34

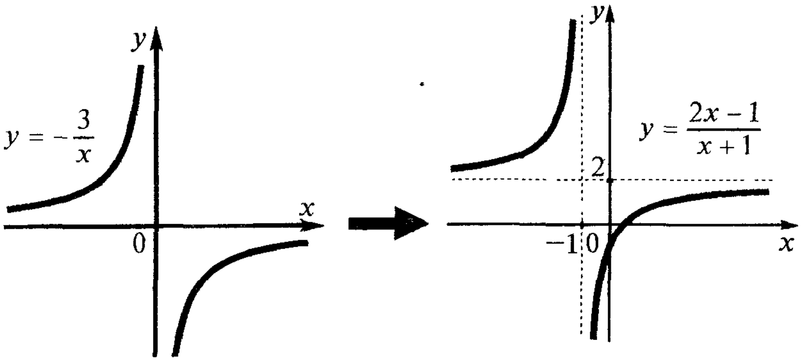
ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) ТА ЇЇ ГРАФІК	
Властивості	
1. *Область визначення*	$x \neq 0$ ($D_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$)
2. *Множина значень*	$y \neq 0$ ($E_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$)
3. *Парність, непарність*	Функція **непарна** ($f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$), тому її графік симетричний відносно початку координат
4. *Точки перетину з осями координат*	Оскільки $x \neq 0$ і $y \neq 0$, то точок перетину з осями координат немає
5. *Неперервність і диференційовність*	Функція $y = \frac{k}{x}$ неперервна в кожній точці своєї області визначення і має похідну $y' = -\frac{k}{x^2}$ ($y' \neq 0$ — критичних точок немає)
6. *Зростання і спадання*	1) при $k > 0$ ($y' < 0$) функція **спадає на кожному інтервалі** $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ 2) при $k < 0$ ($y' > 0$) функція **зростає на кожному інтервалі** $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

7. *Асимптоти* (див. табл. 31)	1) при $x \to \infty$ $y = \frac{k}{x} \to 0$, тобто $\boxed{y = 0 \text{ — горизонтальна асимптота}}$ 2) при $x \to 0$ справа $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} +\infty \text{ при } k > 0 \\ -\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$, при $x \to 0$ зліва $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} -\infty \text{ при } k > 0 \\ +\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$, тобто $\boxed{x = 0 \text{ — вертикальна асимптота}}$

8. ***Графік функції*** $y = \frac{k}{x}$ *— крива, що складається з двох віток (симетрична відносно початку координат), яка **називається гіперболою** (при* $k > 0$ *вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, при* $k < 0$ *— у II і IV чвертях)*

$k > 0$	$k < 0$
	

Графік дробово-лінійної функції ($y = \frac{ax + b}{cx + d}$, де $c \neq 0$)

Приклад	Спосіб побудови
Побудувати графік функції $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ **Розв'язання.** $y = \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{2(x + 1) - 3}{x + 1} = 2 - \frac{3}{x + 1}$, тобто графік заданої функції можна одержати з графіка функції $y = -\frac{3}{x}$ **паралельним перенесенням** вздовж осі $0x$ на (-1) одиницю і вздовж осі $0y$ на $(+2)$ одиниці 	***Виділити цілу частину*** (*тобто записати у вигляді* $y = m + \frac{k}{x - n}$) ***і виконати паралельне перенесення графіка*** $y = \frac{k}{x}$ *(вздовж осі* $0x$ *на* n *одиниць і вздовж осі* $0y$ *на* m *одиниць — див. табл. 32)*

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ГРАФІК

Означення. Квадратичною функцією називається функція вигляду

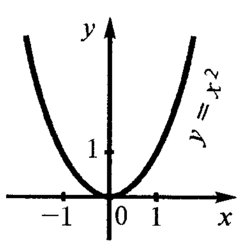
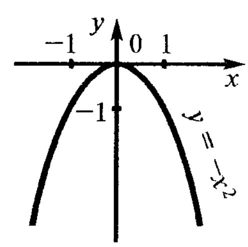
$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, де $a \neq 0$

Властивості

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ завжди є **парабола**, вітки якої напрямлені вгору при $a > 0$ й униз при $a < 0$	Координати вершини параболи: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$, де $D = b^2 - 4ac$. Вісь симетрії параболи $x = x_0$

1. *Область визначення* (D_y)	$x \in \boldsymbol{R}$ $(D_y = \boldsymbol{R})$
2. *Множина значень* (E_y)	При $a > 0$ $E_y = [y_0; +\infty)$ При $a < 0$ $E_y = (-\infty; y_0]$
3. *Парність, непарність*	При $b \neq 0$ функція ні парна, ні непарна При $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ парна
4. *Неперервність і диференційовність*	Квадратична функція неперервна і диференційовна на всій числовій прямій $y' = 2ax + b$
5. *Зростання і спадання, екстремуми*	При $a > 0$ спадає на $(-\infty; x_0]$ $(y' < 0)$ і зростає на $[x_0; +\infty)$ $(y' > 0)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — точка мінімуму, $y_0 = y(x_0)$ — мінімум При $a < 0$ зростає на $(-\infty; x_0]$ $(y' > 0)$ і спадає на $[x_0; +\infty)$ $(y' < 0)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — точка максимуму, $y_0 = y(x_0)$ — максимум

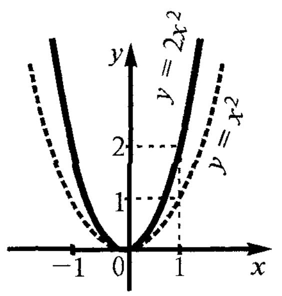
Розміщення деяких графіків квадратичних функцій

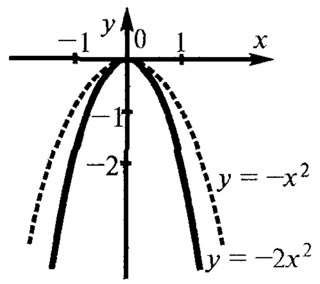
$a > 0$	$a < 0$
$y = x^2$  Найменше значення — 0 (при $x = 0$), найбільшого немає	$y = -x^2$  Найбільше значення — 0 (при $x = 0$), найменшого немає

$a > 0$	$a < 0$

$y = ax^2$

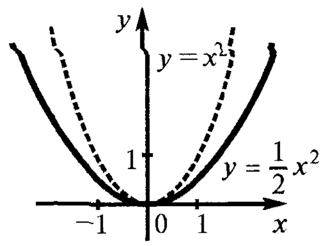
$|a| > 1$

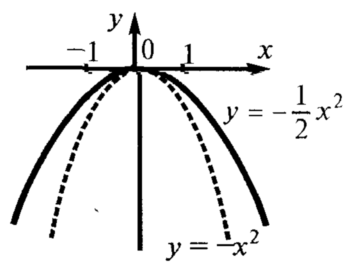




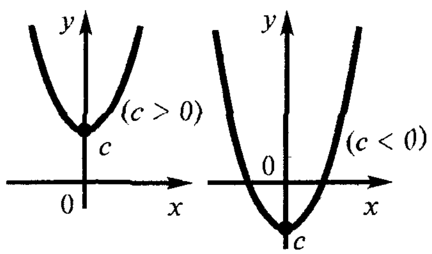
$y = ax^2$

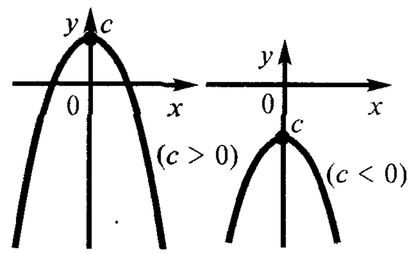
$0 < |a| < 1$





$y = ax^2 + c$



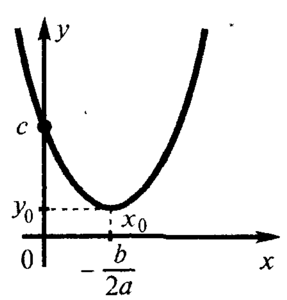


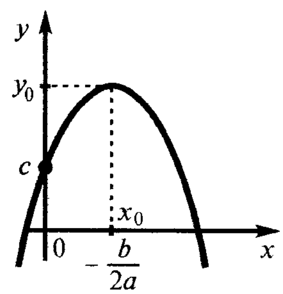
Найменше значення дорівнює c (при $x = 0$), найбільшого немає

Найбільше значення дорівнює c (при $x = 0$), найменшого немає

$y = ax^2 + bx + c$

Абсциса вершини $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$





Найменше значення (y_0) функція набуває в точці x_0, найбільшого значення немає

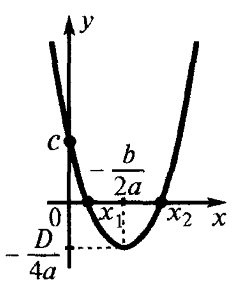
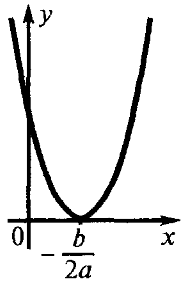
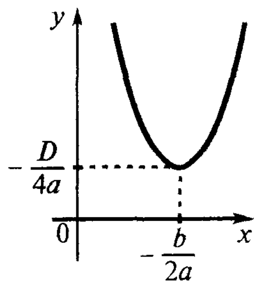
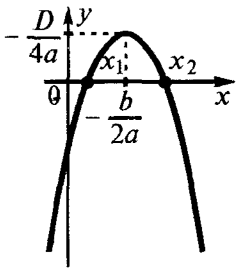
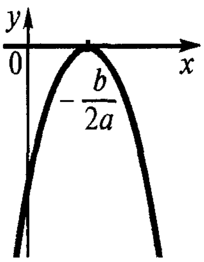
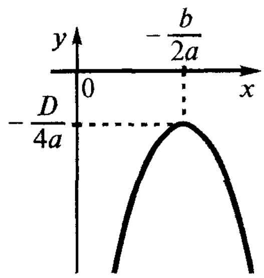
$y_0 = y(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$,

де $D = b^2 - 4ac$

Найбільше значення (y_0) функція набуває в точці x_0, найменшого значення немає

Парабола перетинає вісь $0y$ в точці c

Різні випадки розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ відносно осі 0x ($D = b^2 - 4ac$ — дискримінант)

При $D > 0$ графік перетинає вісь $0x$ у двох точках	При $D = 0$ графік дотикається до осі $0x$	При $D < 0$ графік не перетинає вісь $0x$
$a > 0$, $D > 0$ 	$a > 0$, $D = 0$ 	$a > 0$, $D < 0$ 
$a < 0$, $D > 0$ 	$a < 0$, $D = 0$ 	$a < 0$, $D < 0$ 

Побудова ескізу графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

I спосіб

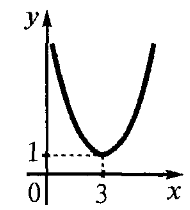
1. Обчислити абсцису вершини
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
2. Підставити $x = x_0$ у рівняння і обчислити ординату вершини — y_0
3. Побудувати ескіз параболи (вигляду $y = ax^2$) з вершиною в точці $(x_0; y_0)$
при $a > 0$ — вітки вгору,
при $a < 0$ — вітки униз

II спосіб

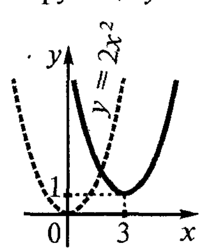
1. Виділити повний квадрат
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$
2. Використовуючи елементарні перетворення графіків (табл. 32), **виконати паралельне перенесення параболи ax^2** (уздовж осі $0x$ на $-\frac{b}{2a}$, уздовж осі $0y$ на $-\frac{D}{4a}$)

Приклад. Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 12x + 19$

Розв'язання. 1. $x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$
2. $y_0 = y(x_0) = y(3) = 1$
3. Будуємо параболу вигляду $y = 2x^2$ (вітки вгору, оскільки $a = 2 > 0$) з вершиною в точці $(3; 1)$ (перетин із віссю $0y$ в точці $c = 19$)

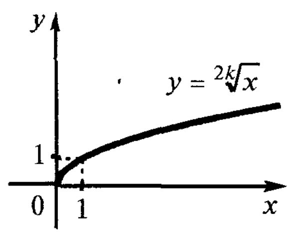
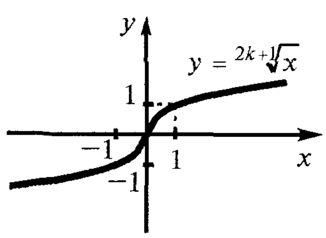


Розв'язання.
1. $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right) =$
$= 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{19}{2}\right) = 2(x-3)^2 + 1$
2. Графік заданої функції одержуємо з графіка функції $y = 2x^2$ (парабола, вітки напрямлено вгору, вершина в точці $(0; 0)$ — див. вище) паралельним перенесенням уздовж осі $0x$ на $(+3)$ одиниці і вздовж осі $0y$ на $(+1)$ одиницю



$$\boxed{y = 2(x-3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19}$$

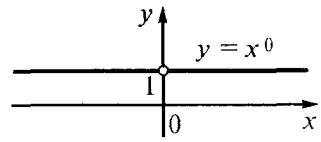
Таблиця 36

<table>
<tr><th colspan="3">ФУНКЦІЯ $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \geq 2, n \in \boldsymbol{N}$) ТА ЇЇ ГРАФІК</th></tr>
<tr><th colspan="3">Властивості</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x) = \sqrt[n]{x}$</td><td>n — парне ($n = 2k$, $k \in N$)</td><td>n — непарне ($n = 2k + 1$, $k \in N$)</td></tr>
<tr><td>$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[2k]{x}$</td><td>$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td>1. Область визначення</td><td>$x \geq 0$ ($D_y = [0; +\infty)$)</td><td>$x \in R$ ($D_y = R$)</td></tr>
<tr><td>2. Множина значень</td><td>$y \geq 0$ ($E_y = [0; +\infty)$)</td><td>$y \in R$ ($E_y = R$)</td></tr>
<tr><td>3. Парність, непарність</td><td>Ні парна, ні непарна</td><td>Функція непарна
$f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$,
отже, її графік симетричний відносно початку координат</td></tr>
<tr><td>4. Точки перетину з осями координат</td><td colspan="2">Якщо $y = 0$, то $\sqrt[n]{x} = 0$, тобто $x = 0$, отже,
графік проходить через початок координат</td></tr>
<tr><td>5. Неперервність і диференційовність</td><td colspan="2">Функція $y = \sqrt[n]{x}$ неперервна в кожній точці своєї області визначення і при $x \neq 0$ має похідну $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6. Зростання і спадання</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$(0; +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>Не існує</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>↗*</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$(-\infty; 0)$</td><td>0</td><td>$(0; +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>Не існує</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Враховуючи неперервність функції, одержуємо, що функція $y = \sqrt[n]{x}$ зростає на всій своїй області визначення
(при $x \in [0; +\infty)$) (при $x \in R$)</td></tr>
<tr><td>7. Взаємно обернені функції</td><td>$y = x^{2k}$ (при $x \geq 0$) і $y = \sqrt[2k]{x}$</td><td>$y = x^{2k+1}$ (при $x \in R$) і $y = \sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Графіки симетричні відносно прямої $y = x$ (див. табл. 30)</td></tr>
<tr><td>8. Графік функції $y = \sqrt[n]{x}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

* ↗ — функція зростає, ↘ — функція спадає.

Таблиця 37

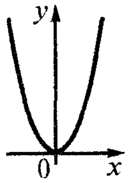
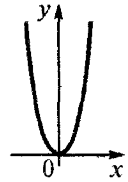
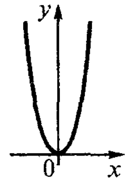
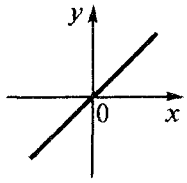
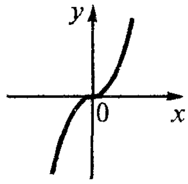
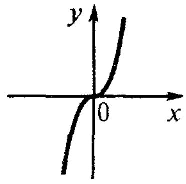
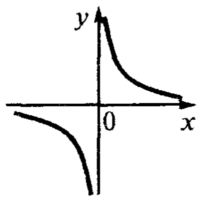
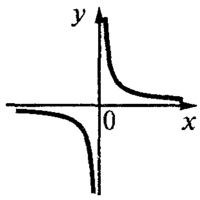
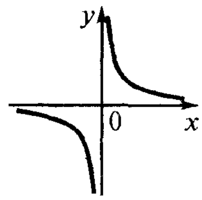
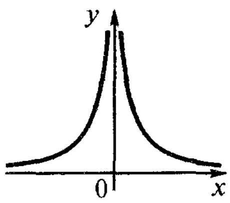
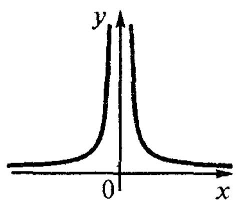
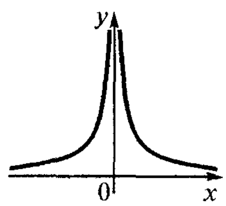
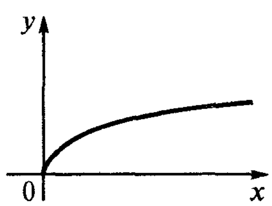
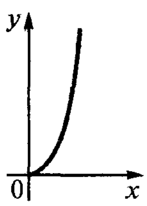
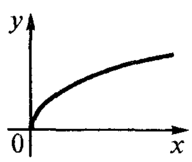
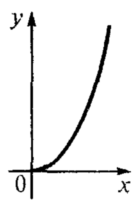
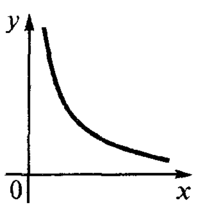
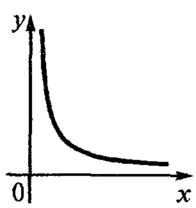
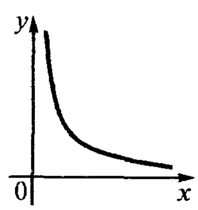
СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Означення	**Особливий випадок ($\alpha = 0$)**
Функція вигляду $y = x^\alpha$, де α — будь-яке дійсне число, називається степеневою функцією	Якщо $\alpha = 0$, то $y = x^\alpha = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$) 

Властивості функції $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$)

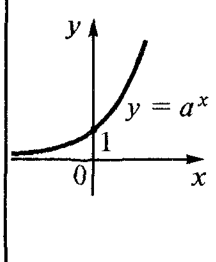
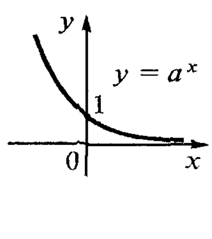
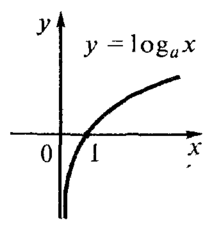
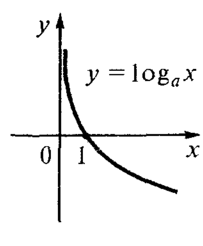
$f(x) = x^\alpha$	α — натуральне		α — ціле від'ємне		α — не ціле	
	парне	**непарне**	**парне**	**непарне**	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
1. *Область визначення — D_f*	R		$x \neq 0$		$x \geq 0$ $[0; +\infty)$	$x > 0$ $(0; +\infty)$
2. *Множина значень — E_f*	$[0; +\infty)$	R	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
3. *Парність, непарність*	парна	непарна	парна	непарна	ні парна, ні непарна	
4. *Періодичність*	не періодична					
5. *Перетин з осями координат*	$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$		немає		$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$	немає
6. *Похідна*	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$					
7. *Зростання і спадання*	$(-\infty; 0)$ — спадає, $(0; +\infty)$ — зростає	зростає	$(-\infty; 0)$ — зростає, $(0; +\infty)$ — спадає	$(-\infty; 0)$ — спадає, $(0; +\infty)$ — спадає	зростає	спадає
8. *Екстремуми*	$\begin{cases} x_{min} = 0, \\ y_{min} = 0 \end{cases}$	немає			$\min f(x) = f(0) = 0$ $[0, +\infty)$	немає
9. *Асимптоти*	немає		$x = 0$ *і* $y = 0$		немає	$x = 0$ *і* $y = 0$
10. *Опуклість і точки перегину*	$\cup$ *	при $\alpha \neq 1$ $(-\infty; 0)$ $\cap$ $(0; +\infty)$ $\cup$ 0 — точка перегину	$(-\infty; 0)$ $\cup$ $(0; +\infty)$ $\cup$	$(-\infty; 0)$ $\cap$ $(0; +\infty)$ $\cup$	$0 < \alpha < 1$ $\cap$ $\alpha > 1$ $\cup$	$\cup$

* $\cup$ — опуклість униз,
$\cap$ — опуклість угору.

Графіки степеневої функції ($y = x^{\alpha}$)			
α — **парне натуральне число**	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2n}$, $n \in N$ 
α — **непарне натуральне число**	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2n+1}$, $n \in N$ 
α — **непарне від'ємне число**	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$ 
α — **парне від'ємне число**	$y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
α — **не ціле додатне число**	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — не ціле)  **$0 < \alpha < 1$**  **$\alpha > 1$**
α — **не ціле від'ємне число**	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — не ціле) 

Таблиця 38

ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

	Показникова функція		Логарифмічна функція	
	Означення. Показниковою функцією називається функція вигляду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$		**Означення. Логарифмічною** функцією називається функція вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$	
Властивості				
1. *Область визначення D_f*	$x \in R$ $\quad (D(a^x) = R)$		$x > 0$ $\quad (D(\log_a x) = (0; +\infty))$	
2. *Множина значень E_f*	$y > 0$ $\quad (E(a^x) = (0; +\infty))$		$y \in R$ $\quad (E(\log_a x) = R)$	
3. *Парність, непарність*	Функція ні парна, ні непарна			
4. *Перетин з осями координат*	Перетину з віссю $\boxed{0x}$ немає ($a^x \neq 0$ при $a > 0$, $a \neq 1$) $\boxed{0y}$ $x = 0$, $y = a^0 = 1$		$\boxed{0x}$ $(y = 0)$ $\log_a x = 0$ при $x = a^0 = 1$ Перетину з віссю $\boxed{0y}$ немає ($x \neq 0$ за областю визначення)	
5. *Неперервність і похідна*	Функція неперервна і диференційовна в усій області визначення			
	$(a^x)' = a^x \ln a$		$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	
6. *Проміжки знакосталості*	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
	Для всіх $x \in R$ $y = a^x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$)		$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$ $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$
7. *Зростання і спадання* (екстремумів немає)	зростає	спадає	зростає	спадає
8. *Асимптоти* (див. табл. 31)	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to 0$	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to 0$	При $x \to 0$ (справа) $y = \log_a x \to -\infty$, $\quad y = \log_a x \to +\infty$	
	Тобто пряма $y = 0$ — горизонтальна асимптота		Тобто пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота	
	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to -\infty$
Функції $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ — взаємно обернені функції, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$ (див. табл. 30)				
9. *Графіки показникових і логарифмічних функцій*	 $a > 1$	 $0 < a < 1$	 $a > 1$	 $0 < a < 1$

Таблиця 39

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Рівняння	**Нерівності зі змінною**
Означення. Рівність із змінною називається рівнянням У загальному вигляді рівняння розуміється як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргументів, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому рівняння з однією змінною x у загальному вигляді звичайно записують так: $f(x) = g(x)$	**Поняття нерівності зі змінною.** Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків: $>$ (більше), $<$ (менше), $\geq$ (більше або дорівнює), $\leq$ (менше або дорівнює), то одержуємо нерівність зі змінною. У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») звичайно записується так: $f(x) > g(x)$
Коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, що перетворює рівняння на правильну числову рівність	**Розв'язком нерівності** називається значення змінної, що перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність

***Розв'язати рівняння (нерівність)** — значить знайти всі його корені (розв'язки) або показати, що їх немає*

Область допустимих значень (ОДЗ)

Означення. Областю допустимих значень (або областю визначення) рівняння чи нерівності називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, *що стоять у лівій і правій частинах рівняння або нерівності*

Приклад 1	**Приклад 2**
Для рівняння (або нерівності) $\sqrt{x+1} \gtreqless x$ ОДЗ: $x + 1 \geq 0$, тобто $x \geq -1$ (можна також записати: $x \in [-1; +\infty)$, оскільки область визначення функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ визначається умовою $x + 1 \geq 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел	Для рівняння (або нерівності) $\frac{1}{x-2} \gtreqless \frac{x}{x-1}$ ОДЗ: $\begin{cases} x-2 \neq 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1 \end{cases}$ що можна записати і так: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Рівняння-наслідки ($\Rightarrow$)

Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому **при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою у початкове рівняння є складовою частиною розв'язування** (див. також табл. 40)	**При розв'язуванні нерівностей наслідки не використовуються** (а використовуються рівносильні перетворення), оскільки звичайно неможливо виконати перевірку всіх одержаних розв'язків нерівності-наслідку (див. також табл. 40)

Рівносильні рівняння і нерівності ($\Leftrightarrow$)

Означення. Два рівняння (нерівності) називаються **рівносильними** (або еквівалентними) **на деякій множині** (звичайно на ОДЗ початкового рівняння чи нерівності), **якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки,** тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого і, навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого (див. також табл. 41)

<table>
<tr><th colspan="2">Деякі теореми про рівносильність</th></tr>
<tr><th>Рівняння</th><th>Нерівності</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Якщо з однієї частини рівняння (або нерівності) перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння (або нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині)</td></tr>
<tr><td>2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)</td><td>2а. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те ж саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), то одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)

2б. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те ж саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і, крім того, змінити знак нерівності на протилежний, то одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)</td></tr>
<tr><td>3. Якщо від обох частин рівняння $f(x) = g(x)$ взяти зростаючу (або спадну) функцію $\varphi(u)$ і при цьому не відбувається звуження ОДЗ заданого рівняння, то одержане рівняння $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ буде рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)</td><td>3а. Якщо від обох частин нерівності $f(x) > g(x)$ взяти зростаючу функцію $\varphi(u)$ (зберігши знак нерівності) і при цьому не відбувається звуження ОДЗ заданої нерівності, то одержана нерівність $\varphi(f(x)) > \varphi(g(x))$ буде рівносильна заданій (на ОДЗ заданої)

3б. Якщо від обох частин нерівності $f(x) > g(x)$ взяти спадну функцію $\varphi(u)$, змінивши знак нерівності на протилежний, і при цьому не відбувається звуження ОДЗ заданої нерівності, то одержана нерівність $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$ буде рівносильна заданій (на ОДЗ заданої)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Наслідки</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Оскільки функція $\varphi(u) = u^{2k+1}$ $(k \in N)$ монотонно зростає, то

$\boxed{f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2k+1}(x) = g^{2k+1}(x)}$ $\boxed{f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x)}$

При піднесенні обох частин рівняння (нерівності) до непарного натурального степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо рівняння (нерівність), рівносильне даному (на ОДЗ заданого)</td></tr>
<tr><td>2. Оскільки функція $\varphi(u) = u^{2k}$ $(k \in N)$ монотонно зростає лише при $u \geq 0$, то в разі, коли обидві частини рівняння (нерівності) невід'ємні, при піднесенні обох його частин до парного натурального степеня одержуємо рівняння (нерівність), рівносильне даному (на ОДЗ заданого)</td><td>Приклад. $|x+3| > |x-1| \Leftrightarrow$
(обидві частини невід'ємні!)
$\Leftrightarrow (|x+3|)^2 > (|x-1|)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x > -8 \Leftrightarrow x > -1$

(Але $\sqrt{x+1} > x \not\Leftrightarrow x + 1 > x^2$ — див. табл. 52)</td></tr>
</table>

Таблиця 40

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ*

Розв'язування рівнянь

Наслідки ($\Rightarrow$)

Розв'язання

I. ① → ② Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

II. Перевірка (підстановкою у початкове рівняння)

Рівносильні перетворення ($\Leftrightarrow$)

Розв'язання

I. Врахувати ОДЗ початкового

II. ① ⇅ ② Гарантія на ОДЗ зберігання правильної рівності (чи нерівності) при прямих і обернених перетвореннях на кожному кроці розв'язування

Викорисання властивостей відповідних функцій (див. табл. 43)

1. Скінченна ОДЗ
2. Оцінка лівої та правої частин
3. Використання монотонності функції
4. «Шукай квадратний тричлен» тощо

Розв'язування нерівностей

Метод інтервалів

Для нерівностей вигляду $\boxed{f(x) \gtrless 0}$, де $f(x)$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення функції

Розв'язання

1. Знайти ОДЗ
2. Знайти нулі $f(x)$ $\boxed{f(x) = 0}$
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак у кожному інтервалі, на які разбивається ОДЗ
4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності

Таблиця 41

СХЕМА ВИКОРИСТАННЯ РІВНОСИЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ*

Задане рівняння або нерівність $\Leftrightarrow$

- I. Врахувати ОДЗ початкового
- II. Гарантувати (на ОДЗ) прямі і обернені перетворення ① $\rightleftarrows$ ② (із збереженням правильної рівності чи нерівності)

Таблиця 42

ЯК НЕ ВТРАТИТИ КОРЕНІ РІВНЯННЯ ПРИ ЗВУЖЕННІ ОДЗ (звужену частину ОДЗ заштриховано)*

I спосіб		**II спосіб**		**III спосіб**	
ОДЗ		ОДЗ		ОДЗ	
I	II	I	II	I	II
1. Перевіряємо, чи не є точки, що знаходяться в цій частині ОДЗ, коренями рівняння	2. Знаходимо розв'язок у цій частині ОДЗ	1. Довести, що в цій частині ОДЗ коренів немає	2. Знайти розв'язок у цій частині ОДЗ		1. Довести, що всі корені знаходяться в цій частині ОДЗ 2. Знайти розв'язки у цій частині ОДЗ
корені			корені		корені

* Див. Додаток, с. 18, 20, 21.

Таблиця 43

ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

1. Скінченна ОДЗ

*Якщо **область допустимих значень (ОДЗ)** рівняння (нерівності або системи) **складається з скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення***

Приклад. $\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ 2-2x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1, \\ x^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x^2=1 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 1$

Перевірка: $x=1$ — корінь ($\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}$; $1=1$),
$x=-1$ — не корінь ($\sqrt{0}-1\ne 1+\sqrt{0}$).

Відповідь: $x=1$

2. Оцінка лівої та правої частин рівняння

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\ge a \\ g(x)\le a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}}$$

Приклад. $x^2+2^{|x|}=1$

Розв'язання. $x^2+2^{|x|}=1 \Leftrightarrow 2^{|x|}=1-x^2 \Leftrightarrow$

($f(x)=2^{|x|}\ge 1$ (оскільки $|x|\ge 0$), $g(x)=1-x^2\le 1$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|}=1, \\ 1-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0 \\ \hline f_1(x)\ge 0 \\ f_2(x)\ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)\ge 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0 \end{cases}}$$

Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю

Приклад. $\sqrt{x-2}+|x^3-8|+\lg(1+\sqrt{x^2-4})=0$

Розв'язання. Оскільки $f_1(x)=\sqrt{x-2}\ge 0$,
$f_2(x)=|x^3-8|\ge 0$, $f_3(x)=\lg(1+\sqrt{x^2-4})\ge 0$,
то задане рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ |x^3-8|=0, \\ \lg(1+\sqrt{x^2-4})=0. \end{cases}$ З першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє всю систему

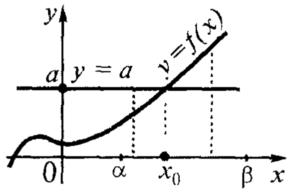
Відповідь: $x=2$

3. Використання монотонності

Схема розв'язування

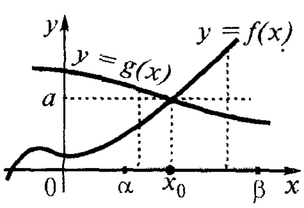
1. ***Підбираємо один або декілька коренів рівняння***
2. ***Доводимо, що інших коренів це рівняння не має*** *(використовуючи теореми про корені рівнянь або оцінку лівої та правої частин)*

Теореми про корені рівнянь



Теорема 1. *Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку*

Приклад. Рівняння $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$ має єдиний корінь $x=1$ ($\sqrt{1}+\sqrt[3]{1}=2$, тобто $2=2$), оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ зростає (на всій О.В. $x\ge 0$)



Теорема 2. *Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку*

Приклад. Рівняння $2^x=6-x$ має єдиний корінь $x=2$ ($2^2=6-2$, тобто $4=4$), оскільки $f(x)=2^x$ — зростає, а $g(x)=6-x$ — спадає

4. «Шукай квадратний тричлен»	
Спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції)	**Приклад.** $4^x - (7-x)\,2^x + 12 - 4x = 0$ **Розв'язання.** Запишемо, що $4^x = 2^{2x}$, і введемо заміну $2^x = t$. Одержуємо $t^2 - (7-x)\,t + 12 - 4x = 0.$ Розглянемо це рівняння як квадратне відносно t. Його дискримінант $D = (7-x)^2 - 4(12-4x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$ Тоді $t_{1,2} = \dfrac{7 - x \pm (x+1)}{2}$, тобто $t_1 = 4$, $t_2 = 3 - x$. Обернена заміна дає: $2^x = 4$ (звідси $x = 2$) або $2^x = 3 - x$ (має єдиний корінь $x = 1$, оскільки $f(x) = 2^x$ — зростає, а $g(x) = 3 - x$ — спадає) **Відповідь:** 1; 2.

Таблиця 44

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ІЗ МОДУЛЯМИ*

Способи розв'язування

За означенням

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0 \\ 0, & \text{якщо } a = 0 \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

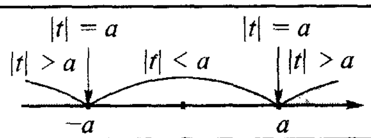
Виходячи з геометричного змісту

$|a|$ — відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a

1. $|f(x)| = a$
2. $|f(x)| = |g(x)|$
3. $|f(x)| > a$
4. $|f(x)| < a$

За загальною схемою

1. Знайти ОДЗ
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій
3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на інтервали
4. Знайти розв'язок у кожному інтервалі (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий інтервал)

Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)

1 $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| = a \Leftrightarrow (f(x) = a}$ **або** $\boldsymbol{f(x) = -a)}$
2. $\boldsymbol{\|f(x)\| = \|g(x)\| \Leftrightarrow (f(x) = g(x)}$ **або** $\boldsymbol{f(x) = -g(x))}$
3. $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| > a \Leftrightarrow (f(x) < -a}$ **або** $\boldsymbol{f(x) > a)}$
4. $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}}$
Узагальнення
5 $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x) \end{cases}}$
6. $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)}$ **або** $\boldsymbol{f(x) > g(x)}$
7. $\quad \boldsymbol{\|f(x)\| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}}$

Використання спеціальних співвідношень	
1.	$\|u\| = u \Leftrightarrow u \ge 0$
2.	$\|u\| = -u \Leftrightarrow u \le 0$
3.	$\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u^2 = v^2$
4.	$\|u\| > \|v\| \Leftrightarrow u^2 > v^2$ або $\|u\| - \|v\| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$ *знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їхніх квадратів*
5.	$\|u\| + \|v\| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{cases}$
6.	$\|u\| + \|v\| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \le 0 \\ v \le 0 \end{cases}$
7.	$\|u\| + \|v\| = \|u + v\| \Leftrightarrow uv \ge 0$
8.	$\|u\| + \|v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow uv \le 0$
9.	$\|x - a\| + \|x - b\| = b - a \Leftrightarrow a \le x \le b$, де $a < b$

* Див. Додаток, с. 31.

Таблиця 45

ЗАМІНИ ЗМІННИХ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Якщо в рівняння (нерівність або тотожність) змінна входить у вигляді деякої функції від одного й того ж самого виразу, то звичайно зручно цей однаковий вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною)

Приклади замін змінніх (див. також табл. 46)

Вид рівняння	Заміна (або план розв'язування)	Приклад
Біквадратне рівняння $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$	$\boxed{x^2 = t}$ (зводить до квадратного рівняння)	$x^4 + 6x^2 - 7 = 0$ **Розв'язання. Заміна** $x^2 = t$. Одержуємо $t^2 + 6t - 7 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -7$ **Обернена заміна** $x^2 = 1$ або $x^2 = -7$. Звідси $x = \pm 1$ ($x^2 = -7$ коренів немає)
Ті, що зводяться до біквадратного $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$	$\boxed{t = \dfrac{(x + a) + (x + b)}{2}}$	$(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 16$ **Розв'язання. Заміна** $t = \dfrac{(x + 1) + (x + 3)}{2} = x + 2$ (Тоді $x = t - 2$). Одержуємо $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$. Його корені (див. вище) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тоді $x_1 = t_1 - 2 = -1$; $x_2 = t_2 - 2 = -3$
$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ $\oplus = \oplus$	**Перегрупувати співмножники так** (якщо можливо), **щоб виконувалася рівність** $\boxed{a + b = c + d}$ **і парами розкрити дужки**	$(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 24$ **Розв'язання.** Перепишемо рівняння так. $(x - 4)(x + 3)(x - 2)(x + 1) = 24$ (тоді $-4 + 3 = -2 + 1$) і розкриємо парами дужки. Одержуємо $(x^2 - x - 12)(x^2 - x - 2) = 24$. **Заміна** $x^2 - x = t$ дає рівняння $(t - 12)(t - 2) = 24$. Тоді $t^2 - 14t = 0$ і $t_1 = 0$, $t_2 = 14$. **Обернена заміна:** $x^2 - x = 0$ або $x^2 - x = 14$. Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$
$a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$ $(a \neq 0)$	$\boxed{x \pm \dfrac{1}{x} = t}$ Тоді $\left(x \pm \dfrac{1}{x}\right)^2 = t^2$ і звідси $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 \mp 2$	$6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 38$ **Розв'язання. Заміна** $x + \dfrac{1}{x} = t$. Тоді $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Одержуємо $6(t^2 - 2) + 5t = 38$. Звідси $t_1 = \dfrac{5}{2}$; $t_2 = -\dfrac{10}{3}$. **Обернена заміна** $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$ або $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{3}$. Розв'язуючи ці рівняння, дістаємо $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\dfrac{1}{3}$.
Зворотне рівняння *Рівняння вигляду $f(x) = 0$, де $f(x)$ многочлен стандартного вигляду, в якого рівні коефіцієнти членів, однаково віддалених від початку і кінця рівняння*	Для **парного степеня** *ділимо на степінь середнього члена і групуємо члени з однаковими коефіцієнтами.* Для **непарного степеня** —завжди корінь $x = -1$ і ділимо на $x + 1$ (одержуємо зворотне рівняння парного степеня)	$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$ **Розв'язання.** Це зворотне рівняння парного степеня. Оскільки $x = 0$ не є його розв'язком, то, поділивши обидві частини на $x^2 \neq 0$ (x^2 — степінь зі змінною з середнього члена), дістаємо рівняння, рівносильне заданому Групуючи члени з однаковими коефіцієнтами, одержуємо рівняння $6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$, яке розв'язано вище

Таблиця 46

ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Означення. Якщо всі члени рівняння (у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних або від двох виглядів змінних) мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається однорідним.
Розв'язується однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї зі змінних

Приклади розв'язань однорідних рівнянь

1. Ціле алгебраїчне	2. Ірраціональне	3. Тригонометричне	4. Показникове	5. Логарифмічне
$(x^2-5)^2-3(x^2-5)(2x-5)+$ $+2(2x-5)^2=0$	$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+$ $+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0$	$\sin^2 x-3\sin x\cos x+$ $+2\cos^2 x=0$	$5^{2x}-3\cdot 5^x\cdot 7^x+2\cdot 7^{2x}=0$	$\lg^2 x-3\lg x\lg(2x-1)+$ $+2\lg^2(2x-1)=0$
$\boxed{x^2-5=u;\ 2x-5=v}$	$\boxed{\sqrt[3]{x-6}=u;\ \sqrt[3]{2x+3}=v}$	$\boxed{\sin x=u;\ \cos x=v}$	$\boxed{5^x=u;\ 7^x=v}$	$\boxed{\lg x=u;\ \lg(2x-1)=v}$

Виконавши заміну, в усіх випадках одержуємо $\boxed{u^2-3uv+2v^2=0}$ (*) — ***однорідне рівняння другого степеня***

I. При $v=0$ з рівняння (*) одержуємо $u=0$, і в цьому випадку розв'язок рівняння (*) збігається з розв'язком системи $\begin{cases}u=0,\\ v=0.\end{cases}$

Розв'язуємо цю систему для кожного наведеного прикладу

1. Розв'язків немає	2. Розв'язків немає	3. Розв'язків немає	4. Розв'язків немає	5. Розв'язок $\boxed{x=1}$

II. При $v\neq 0$ ділимо обидві частини рівняння (*) на $v^2\neq 0$. Одержуємо $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)^2-3\frac{u}{v}+2=0}$. **Заміна** $\frac{u}{v}=t$. Тоді $t^2-3t+2=0$. Звідси $t_1=1;\ t_2=2$

Зворотна заміна дає сукупність рівнянь $\frac{u}{v}=1$ або $\frac{u}{v}=2$. Для кожного прикладу одержуємо

$\frac{x^2-5}{2x-5}=1$ або $\frac{x^2-5}{2x-5}=2$ $x^2-2x=0$ або $x^2-4x+5=0$ $\boxed{x_1=0,\ x_2=2}$ $\boxed{\text{коренів немає}}$	$\frac{\sqrt[3]{x-6}}{\sqrt[3]{2x+3}}=1$ або $\frac{\sqrt[3]{x-6}}{\sqrt[3]{2x+3}}=2$ $\frac{x-6}{2x+3}=1$ або $\frac{x-6}{2x+3}=8$ $\boxed{x=-9}$ $\boxed{x=-2}$	$\frac{u}{v}=\frac{\sin x}{\cos x}=\mathrm{tg}x$ $\mathrm{tg}x=1$ або $\mathrm{tg}x=2$ $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z}$ $\boxed{x=\mathrm{arctg}2+\pi n,\ n\in Z}$	$\frac{u}{v}=\frac{5^x}{7^x}=\left(\frac{5}{7}\right)^x$ $\left(\frac{5}{7}\right)^x=1$ або $\left(\frac{5}{7}\right)^x=2$ $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=\log_{\frac{5}{7}}2}$	$\frac{\lg x}{\lg(2x-1)}=1$ або $\frac{\lg x}{\lg(2x-1)}=2$ $\boxed{\text{ОДЗ: } x>\frac{1}{2};\ x\neq 1}$ $\lg x=\lg(2x-1)$ або $\lg x=2\lg(2x-1)$ $x=2x-1$; $x=1$ — не входить в ОДЗ $x=(2x-1)^2$; $4x^2-5x+1=0$; $x_1=1$ — не належить ОДЗ; $\boxed{x_2=\frac{1}{4}}$
Відповідь: 0; 2	**Відповідь:** −9; −2	**Відповідь:** $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ $\mathrm{arctg}2+\pi n,\ n\in Z$	**Відповідь:** 0; $\log_{\frac{5}{7}}2$	**Відповідь:** 1, $\frac{1}{4}$ *($x=1$ — корінь з I етапу розв'язання)*

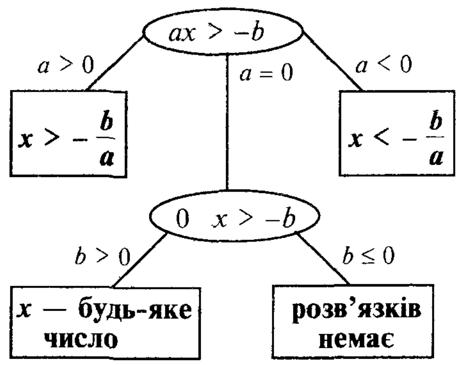
Таблиця 47

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Лінійні рівняння	Лінійні нерівності
Означення. *Лінійним рівнянням з однією змінною* x називається рівняння вигляду $ax + b = 0$, де a і b — дійсні числа	**Означення.** *Лінійною нерівністю з однієї змінною* x називається нерівність вигляду $ax + b > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$
Якщо $a \neq 0$, *то лінійне рівняння називається також рівнянням першого степеня*	*Якщо* $a \neq 0$, *то лінійна нерівність називається також нерівністю першого степеня*
Схема розв'язування	**Схема розв'язування** (для випадку > 0)

Схема розв'язування

Схема розв'язування (для випадку > 0)



Таблиця 48

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Означення. Рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називається квадратним

Рівняння загального виду

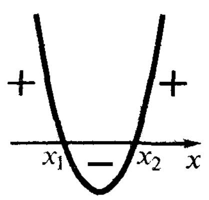
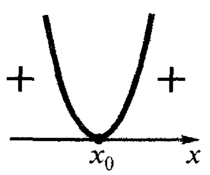
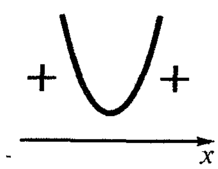
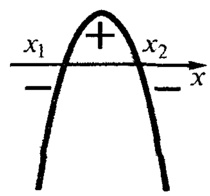
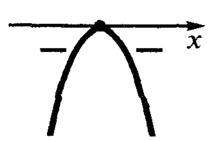
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Зведене рівняння ($a = 1$)

$x^2 + px + q = 0$

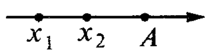
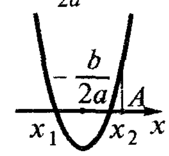
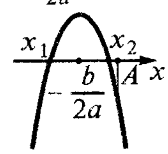
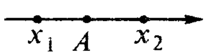
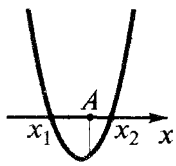
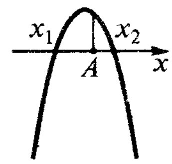
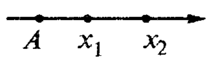
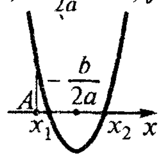
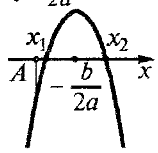
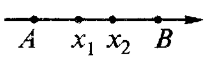
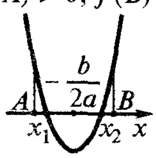
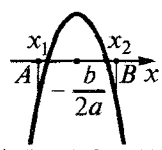
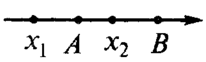
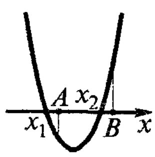
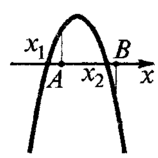
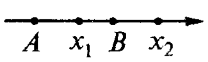
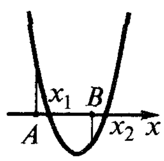
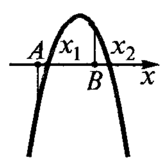
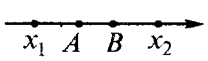
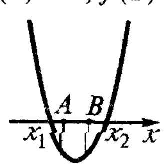
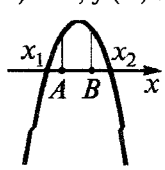
Теорема Вієта	
У загальному випадку	**Для зведеного рівняння**
Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, ***то*** $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$	***Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння*** $x^2 + px + q = 0$***, то*** $\boxed{x_1 + x_2 = -p;\quad x_1 x_2 = q}$
Обернена теорема	
Якщо сума якихось **двох чисел** x_1 *і* x_2 **дорівнює** $-\frac{b}{a}$, **а добуток дорівнює** $\frac{c}{a}$, **то ці числа є коренями квадратного рівняння** $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$	**Якщо сума** якихось **двох чисел** x_1 и x_2 **дорівнює** $-p$, **а добуток дорівнює** q, **то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння** $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$
Розкладання квадратного тричлена на множники	
Якщо x_1 *і* x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (тобто корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), то $\mathbf{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$	**Приклад.** $2x^2 - 5x + 3 = 0$ при $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$. $2x^2 - 5x + 3 = 2\,(x - 1)\,(x - \frac{3}{2})$
Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю ($D = 0$), то $x_1 = x_2$, і тоді $\mathbf{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2}$ **при** $\mathbf{D = 0}$	**Приклад.** $4x^2 + 24x + 36 = 0$ при $x_{1,2} = -3$. $4x^2 + 24x + 36 = 4\,(x + 3)\,(x + 3) = 4\,(x + 3)^2$

Таблиця 49

КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ		
Означення. Нерівність вигляду $\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ ($\mathbf{< 0, \geq 0, \leq 0}$) називається квадратною, якщо $\mathbf{a \neq 0}$		
Щоб розв'язати квадратну нерівність, досить знайти корені квадратного тричлена і побудувати ескіз його графіка (параболу). Як відповідь записуються проміжки осі $0x$, для яких точки параболи розміщені вище від осі $0x$ (для випадку > 0) і нижче від осі $0x$ (для випадку < 0). (Якщо квадратний тричлен має два різних корені x_1 і x_2, можна також використати метод інтервалів — див. табл. 40)		
$\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ $\mathbf{(D = b^2 - 4ac)}$		
$\boxed{a > 0,\ D > 0}$  $\boxed{x \in (-\infty;\, x_1) \cup (x_2;\, +\infty)}$	$\boxed{a > 0,\ D = 0}$  $\boxed{x \in (-\infty;\, x_0) \cup (x_0;\, +\infty)}$	$\boxed{a > 0,\ D < 0}$  $\boxed{x \in R}$ $(x \in (-\infty;\, +\infty))$
$\boxed{a < 0,\ D > 0}$  $\boxed{x \in (x_1;\, x_2)}$	$\boxed{a < 0,\ D = 0}$  Розв'язків немає	$\boxed{a < 0,\ D < 0}$  Розв'язків немає

Таблиця 50

УМОВИ РОЗМІЩЕННЯ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0, D = b - 4ac)$ відносно заданих чисел A і B

Умови для коренів	**Достатні умови**		
	при $a > 0$	**при $a < 0$**	**у загальному випадку ($a \neq 0$)**
$x_1 < A;\ x_2 < A$ 	$D \geq 0;\ -\frac{b}{2a} < A;\ f(A) > 0$ 	$D \geq 0;\ -\frac{b}{2a} < A;\ f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < A, \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
$x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
$x_1 > A;\ x_2 > A$ 	$D \geq 0;\ -\frac{b}{2a} > A;\ f(A) > 0$ 	$D \geq 0;\ -\frac{b}{2a} > A;\ f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > A, \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
$A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$D \geq 0;\ A < -\frac{b}{2a} < B;$ $f(A) > 0;\ f(B) > 0$ 	$D \geq 0;\ A < -\frac{b}{2a} < B;$ $f(A) < 0;\ f(B) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0, \\ A < -\frac{b}{2a} < B, \\ a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
$x_1 < A;\ A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
$A < x_1 < B;\ x_2 > B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a\ \ f(B) < 0 \end{cases}$
$x_1 < A;\ x_2 > B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Таблиця 51

ДРОБОВІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Схема розв'язування

Розв'язування дробових рівнянь

Використання рівнянь-наслідків

1. Зводимо до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
2. Знаходимо корені рівняння $f(x) = 0$
3. Виконуємо перевірку підстановкою у початкове рівняння

Використання властивостей відповідних функцій (див. табл. 43)

Використання рівносильних перетворень

1. Фіксуємо ОДЗ початкового
2. Зводимо до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0\right)$ і розв'язуємо ці рівняння (нерівності) на ОДЗ початкового або виконуємо рівносильні перетворення так, щоб увести зручну заміну змінних (див. також табл. 41)

Розв'язування дробових нерівностей

Використання рівносильних перетворень (див. вище)

Використання методу інтервалів

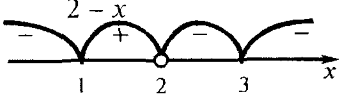
1. Переносимо всі члени в один бік
2. Зводимо до спільного знаменника, обов'язково зберігаючи знаменник
3. Розв'язуємо методом інтервалів (див. табл. 40)

Рівносильні перетворення найпростіших дробових рівнянь і нерівностей

У загальному вигляді	Приклад
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2-4}{x^3-5x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ x^3-5x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ або } x = -2, \\ x^3-5x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x<1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$ або $x < 1$
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0, \\ x-2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-1>0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x>1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x>2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \leq 1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$ або $x \leq 1$

Приклад розв'язування дробової нерівності методом інтервалів

$$\frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} \geq 0$$



1. ОДЗ: $x \neq 2$. **2. Нулі** $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} = 0$ при $x = 1$ або $x = 3$.

3. Позначаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ в кожному інтервалі.

Відповідь: $x \in [1; 2)$ або $x = 3$.

Таблиця 52

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Означення. Ірраціональним рівнянням (нерівністю) називається рівняння (нерівність), що містить змінну під знаком кореня n-го степеня (радикала)

Схема розв'язування

Розв'язування ірраціональних рівнянь

- ***Використання рівнянь-наслідків***
  У кінці — перевірка підстановкою у початкове рівняння (див. табл. 40)
- ***Використання властивостей відповідних функцій*** (див. табл. 43)
- ***Використання рівносильних перетворень*** (на ОДЗ заданого) (див. табл. 41)

Розв'язування ірраціональних нерівностей

- ***Використання рівносильних перетворень*** (на ОДЗ заданого) (див. табл. 41)
- ***Використання методу інтервалів***
  для нерівностей вигляду $f(x) \gtrless 0$ (див. табл. 40 і Додаток, с. 25)

Напрямок перетворень

Перехід від ірраціональних рівнянь і нерівностей до раціональних шляхом
а) піднесення обох частин рівняння або нерівності до одного й того ж самого степеня,
б) спеціальних замін

Теореми про рівносильність деяких ірраціональних рівнянь (нерівностей)

Для рівнянь	Для нерівностей
$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$	$\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless g(x) \Leftrightarrow f(x) \gtrless g^{2k+1}(x)$

При піднесенні обох частин рівняння (або нерівності) до непарного степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо рівняння (або нерівність), рівносильне даному

Для рівнянь	Для нерівностей
$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$	$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$

Якщо обидві частини рівняння або нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин до парного степеня (зі збереженням знака нерівності) одержуємо рівняння або нерівність, яке рівносильне даному (на ОДЗ заданого)

Для рівнянь	Для нерівностей
$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$	$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших ірраціональних рівнянь

$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} = a}$

$a \geq 0$: $\boxed{f(x) = a^{2k}}$

(Оскільки $a \geq 0$, то для всіх коренів цього рівняння $f(x) = a^{2k} \geq 0$, тобто ОДЗ початкового рівняння врахована автоматично)

$a < 0$: **коренів немає**

(Оскільки знак $\sqrt[2k]{f(x)}$ означає лише арифметичне значення кореня, тобто $\sqrt[2k]{f(x)} \geq 0$)

$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} = a}$

$\boxed{f(x) = a^{2k+1}}$

Приклад. $\sqrt{x-3} = 2$ **Розв'язання.** $x - 3 = 2^2$ $x = 7$ **Відповідь:** 7	**Приклад.** $\sqrt{x-3} = -2$ **Розв'язання.** Оскільки $\sqrt{x-3} \geq 0$ завжди (на ОДЗ), то коренів немає. **Відповідь:** коренів немає	**Приклад.** $\sqrt[3]{x-3} = -2$ **Розв'язання.** $x - 3 = (-2)^3$ $x - 3 = -8$ $x = -5$ **Відповідь:** -5

Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших ірраціональних нерівностей

$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} > a}$

$a \geq 0$: $\boxed{f(x) > a^{2k}}$

(Оскільки $a \geq 0$, то $f(x) > a^{2k} \geq 0$, тобто ***ОДЗ врахована автоматично***)

$a < 0$: $\boxed{f(x) \geq 0}$

(Тобто ***x* — *будь-яке число з ОДЗ***)

$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} < a}$

$a > 0$: $\boxed{0 \leq f(x) < a^{2k}}$

(***Знак нерівності зберігається і врахована ОДЗ***)

$a \leq 0$: **розв'язків немає**

(Оскільки $\sqrt[2k]{f(x)} \geq 0$)

$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless a}$

$\boxed{f(x) \gtrless a^{2k+1}}$

(***Знак нерівності зберігається***)

Приклад. $\sqrt{x-3} > 2$ **Розв'язання.** $x - 3 > 2^2$ $x > 7$ **Відповідь:** $(7; +\infty)$	**Приклад.** $\sqrt{x-3} > -2$ **Розв'язання.** x — будь-яке число з ОДЗ, тобто $x - 3 \geq 0$, $x \geq 3$ **Відповідь:** $[3; +\infty)$	**Приклад.** $\sqrt{x-3} < 2$ **Розв'язання.** Враховуючи ОДЗ, одержуємо $0 \leq x - 3 < 2$, тобто $3 \leq x < 5$ **Відповідь:** $[3; 5)$	**Приклад.** $\sqrt{x-3} < -2$ **Розв'язання.** Оскільки $\sqrt{x-3} \geq 0$ завжди (на ОДЗ), то розв'язків немає **Відповідь:** розв'язків немає	**Приклад.** $\sqrt[3]{x-3} < -2$ **Розв'язання.** $x - 3 < (-2)^3$ $x - 3 < -8$ $x < -5$ **Відповідь:** $(-\infty; -5)$

Таблиця 53

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Опорні формули та співвідношення (див. також табл. 18–21, 38)

Формули

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Будь-яка зростаюча (спадна) на проміжку функція набуває кожного свого значення лише в одній точці з цього проміжку

$\boxed{a^{\alpha} = b \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \log_a b}$

Графіки функції $y = a^x$ $(a > 0)$

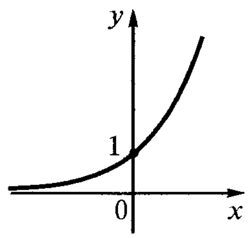
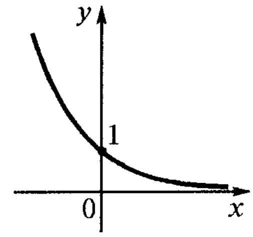
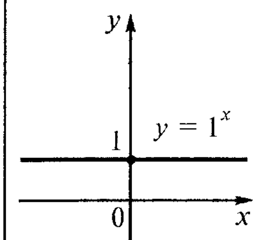
$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
		
Зростає	***Спадає***	***Стала***

Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь і нерівностей

Рівняння

$a > 0$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

- $a \neq 1$: $f(x) = g(x)$
- $a = 1$: **x — будь-яке число з ОДЗ**

Нерівності

$a > 0$, $a \neq 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

- $a > 1$: $f(x) > g(x)$ — ***Знак нерівності не змінюється***
- $0 < a < 1$: $f(x) < g(x)$ — ***Знак нерівності змінюється на протилежний***

Якщо в лівій і правій частинах заданого показникового рівняння (нерівності) стоять лише добутки, частки, корені або степені, то це рівняння (нерівність) безпосередньо зводиться до найпростішого за допомогою використання опорних формул зліва направо (приклад 5) або розв'язується логарифмуванням обох частин рівняння (приклад 6)

Приклади розв'язувань найпростіших показникових рівнянь

1. $2^{x+1}=8$	**2.** $5^{x-3}=1$	**3.** $3^{x+4}=-3$	**4.** $7^{x-1}=3$
Розв'язання. $2^{x+1}=2^3$ $x+1=3$ $x=2$ **Відповідь:** $x=2$	**Розв'язання.** $5^{x-3}=5^0$ $x-3=0$ $x=3$ **Відповідь:** $x=3$	**Розв'язання.** Коренів немає (оскільки $3^t>0$ для всіх t) **Відповідь:** коренів немає	**Розв'язання.** $x-1=\log_7 3$ $x=1+\log_7 3$ **Відповідь:** $x=1+\log_7 3$

5. ***Зведення до однієї основи*** $\dfrac{100^{x-1}}{\sqrt[3]{10^x}}=2^x\cdot 5^x$	**6.** ***Логарифмування обох частин рівняння*** $5^{\frac{1}{x}}\cdot 3^x=15$	**7.** ***В основі — параметр*** $(1+a^2)^{\sqrt{x}}=(1+a^2)^{3\sqrt{x}-2}$ (*)
Розв'язання. $\dfrac{10^{2(x-1)}}{10^{\frac{x}{3}}}=(2\cdot 5)^x$ $10^{2(x-1)-\frac{x}{3}}=10^x$ $2(x-1)-\dfrac{x}{3}=x$ Звідси $x=3$ **Відповідь:** $x=3$	**Розв'язання.** ОДЗ: $x\neq 0$ Логарифмуючи обидві частини за основою 3, одержуємо рівносильне рівняння $\dfrac{1}{x}\log_3 5+x=\log_3(3\cdot 5)$ $\log_3 5+x^2=x(1+\log_3 5)$ $x^2-(1+\log_3 5)x+\log_3 5=0$ $x_{1,2}=\dfrac{1+\log_3 5\pm(1-\log_3 5)}{2}$ **Відповідь:** $x_1=1$; $x_2=\log_3 5$	**Розв'язання.** ОДЗ: $x\geq 0$, $a\in \mathbf{R}$ Розглянемо два випадки: $1+a^2=1$ $(a=0)$ і $1+a^2\neq 1$ $(a\neq 0)$ (але $1+a^2>0$ для всіх a) **1) при $a=0$** одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}}=1^{3\sqrt{x}-2}$, корені якого — всі дійсні числа з ОДЗ, тобто $x\geq 0$, $(x\in[0;+\infty))$ **2) при $a\neq 0$** $1+a^2\neq 1$ і тоді рівняння (*) рівносильне рівнянню $\sqrt{x}=3\sqrt{x}-2$. Звідси $\sqrt{x}=1$; $x=1$ **Відповідь:** 1) при $a=0$ $x\in[0;+\infty)$; 2) при $a\neq 0$ $x=1$

Приклади розв'язувань найпростійших показникових нерівностей

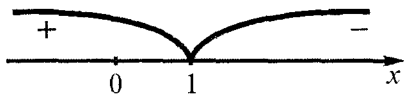
1. $3^{x+1}>9$	**2.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}>\dfrac{1}{9}$	**3.** $5^{\frac{1}{x}}<-3$	**4.** $5^{\frac{1}{x}}>-3$
Розв'язання. $3^{x-1}>3^2$, оскільки $3>1$ (функція $y=3^t$ — зростаюча), то $x-1>2$, тобто $x>3$ **Відповідь:** $x\in(3;+\infty)$	**Розв'язання.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, оскільки $\dfrac{1}{3}<1$ (функція $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ — спадна), то $x-1<2$, тобто $x<3$ **Відповідь:** $x\in(-\infty;3)$	**Розв'язання.** Розв'язків немає, оскільки $5^t>0$ для всіх t **Відповідь:** розв'язків немає	**Розв'язання.** Оскільки $5^t>0$ завжди, то x — будь-яке дійсне число з ОДЗ, тобто $x\neq 0$ **Відповідь:** $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Схема пошуку розв'язувань показникових рівнянь, що не зводяться безпосередньо до найпростіших

1. ***Позбавляємося числових доданків у показниках степенів*** (використовуючи опорні формули справа наліво) 2. Пробуємо ***всі степені*** (зі змінною в показнику) ***звести до однієї основи*** і виконати заміну змінної	**Приклад 1.** $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$ **Розв'язання.** Позбавляючись числового доданка в показнику степеня, одержуємо $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$. Зводячи всі степені до однієї основи, маємо $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$. **Заміна** $2^x = t$ дає рівняння $4t^2 + 7t - 2 = 0$, яке має корені $t_1 = -2$; $t_2 = \frac{1}{4}$. **Обернена заміна** дає $2^x = -2$ (коренів немає) або $2^x = \frac{1}{4}$, звідки $2^x = 2^{-2}$, тобто $x = -2$ **Відповідь:** $x = -2$
3. Якщо не можна звести до однієї основи, то пробуємо звести всі степені ***до двох основ*** так, щоб ***одержати однорідне рівняння***	Приклад — див. табл. 46
4. В інших випадках ***переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо розкласти*** одержаний вираз ***на множники або застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування***, пов'язані з використанням властивостей функцій (див. також табл. 43)	**Приклад 2.** $10^x + 4^{x+1} = 8^x + 4 \cdot 5^x$ **Розв'язання.** Враховуючи, що $4^{x+1} = 4^x \cdot 4$, маємо $(10^x - 8^x) + (4^x \cdot 4 - 4 \cdot 5^x) = 0$. Виносимо за дужки в першому доданку 2^x, а у другому — -4. Одержуємо $2^x(5^x - 4^x) - 4(5^x - 4^x) = 0$. Тепер виносимо за дужки спільний множник $5^x - 4^x$. Маємо $(5^x - 4^x)(2^x - 4) = 0$. Тоді $5^x - 4^x = 0$ або $2^x - 4 = 0$. З другого рівняння одержуємо $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = 2$. Перше рівняння — однорідне (табл. 46), і для його розв'язування поділимо обидві частини на $4^x \neq 0$. Одержуємо $\left(\frac{5}{4}\right)^x - 1 = 0$, $\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1$, тобто $x = 0$ **Відповідь:** $x = 2$ або $x = 0$ **Приклад 3.** $3^x + 4^x = 7^x$ **Розв'язання.** Поділивши обидві частини цього рівняння на $7^x \neq 0$, маємо рівносильне рівняння $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$. Функція $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$ — спадна (як сума двох спадних функцій), тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь $x = 1$ $(3^1 + 4^1 = 7^1,\ 7 = 7)$ **Відповідь:** $x = 1$

Розв'язування показникових нерівностей, що не зводяться безпосередньо до найпростіших

I спосіб ***За допомогою рівносильних перетворень*** (за схемою розв'язування показникових рівнянь) ***задана нерівність зводиться до відомого типу нерівностей*** (квадратної, дробової тощо), і після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей	**Приклад 4.** $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$ **Розв'язання.** Виконавши ті ж самі перетворення, що й у прикладі 1, одержуємо $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$. **Заміна** $2^x = t$ дає нерівність $4t^2 + 7t - 2 > 0$, яка має розв'язки $t < -2$ або $t > \frac{1}{4}$. **Обернена заміна** дає $2^x < -2$ (розв'язків немає) або $2^x > \frac{1}{4}$, звідки $2^x > 2^{-2}$, тобто $x > -2$ **Відповідь:** $x \in (-2; +\infty)$

II спосіб	Приклад 5. $3^x + 4^x > 7^x$
Застосовуємо ***загальний метод інтервалів*** (табл. 40)	**Розв'язання.** Ця нерівність рівносильна нерівності $3^x + 4^x - 7^x > 0$, де $f(x) = 3^x + 4^x - 7^x$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення функція. 1. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$. 2. Нулі $f(x)$. $f(x) = 0$ $(3^x + 4^x - 7^x = 0)$ при $x = 1$ (див. розв'язання прикладу 3) 3. Розбиваємо ОДЗ точкою 1 на два інтервали і знаходимо знак $f(x)$ у кожному інтервалі (див. рисунок)  **Відповідь:** $x \in (-\infty;\ 1)$

Показниково-степеневі рівняння

Показниково-степеневими рівняннями звичайно називають рівняння, що містять вирази типу $f(x)^{g(x)}$, тобто рівняння вигляду $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$.

Основні способи розв'язування

I. Для випадку $f(x) > 0$

1. Якщо можливо, ***використаємо основну логарифмічну тотожність*** *у вигляді* $a^{\log_a N} = N$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$	**Приклад 1.** $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x_1 = -1 \text{ або } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ **Відповідь:** $x = 2$
2. Якщо можливо, ***логарифмуємо обидві частини за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією і тією ж самою числовою основою*** за формулою $U(x) = a^{\log_a U(x)}$, де $a > 0,\ a \neq 1,\ U(x) > 0$	**Приклад 2.** $x^{2\lg x + 1} = 100x$ **Розв'язання.** На ОДЗ $(x > 0)$ обидві частини рівняння додатні, тому після логарифмування за основою 10 одержуємо рівняння, рівносильне даному $\lg(x^{2\lg x + 1}) = \lg(100x)$. Звідси $(2\lg x + 1)\lg x = \lg 100 + \lg x$. **Заміна** $\lg x = t$. $(2t + 1)t = 2 + t$; $t^2 = 1$; $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тоді $\lg x = 1$ або $\lg x = -1$, тобто $x = 10$, $x = 0{,}1$ (обидва корені входять до ОДЗ) **Відповідь:** 10; 0,1

II. Для випадку, коли $f(x)$ — довільний вираз

Два степені з однаковими основами можуть бути рівні в одному з чотирьох випадків: 1) $f(x) = -1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$ — цілі числа однакової парності, 2) $f(x) = 0$ і для коренів цього рівняння $g(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, 3) $f(x) = 1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$ існують, 4) $g(x) = \varphi(x)$ і для коренів цього рівняння існують $f(x)^{g(x)}$ і $f(x)^{\varphi(x)}$	**Приклад 3.** $x^{2x+4} = x^{20}$ **Розв'язання.** Якщо вважати основу x числом (див. Додаток, с. 9), то 1) при $x = -1$ $(-1)^2 = (-1)^{20}$ правильна рівність; 2) при $x = 0$ $0^4 = 0^{20}$ правильно; 3) при $x = 1$ $1^6 = 1^{20}$ правильно; 4) при $2x + 4 = 20$, тобто $x = 8$ $8^{20} = 8^{20}$, правильна рівність **Відповідь:** Корені: −1; 0; 1; 8 **Зауваження.** Якщо вважати основу x змінною, то функція $f(x) = x^{2x+4}$ вважається означеною лише при $x > 0$. З цього погляду дане рівняння має тільки корені 1 і 8 (тобто відповідь не можна записати однозначно!)

Таблиця 54

ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Означення. Логарифмічним рівнянням (нерівністю) називається рівняння (нерівність), в якій змінна знаходиться під знаком логарифма

Опорні співвідношення

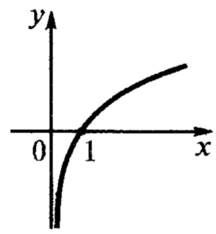
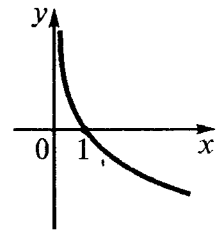
Формули (див. табл. 21)	**Графіки функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$**	
Уникайте перетворень, що звужують ОДЗ початкового рівняння чи нерівності!	$a > 1$  зростає	$0 < a < 1$  спадає

Схема виконання рівносильних перетворень найпростіших логарифмічних рівнянь і нерівностей

$\log_a f(x) = b$; $a > 0,\ a \neq 1$	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$; $a > 0,\ a \neq 1$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$; $a > 0,\ a \neq 1$	
		$a > 1$	$0 < a < 1$
$f(x) = a^b$	$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
(оскільки $a > 0$, то $a^b > 0$ і тому ОДЗ початкового рівняння врахована автоматично)		***Знак нерівності не змінюється і враховується ОДЗ***	***Знак нерівності змінюється і враховується ОДЗ***

Приклади розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь і нерівностей

Рівняння		**Нерівності**	
$\log_2(x - 5) = 3$	$\log_4 x = \log_4(2x - 1)$	$\log_5(2x) > \log_5(x - 1)$	$\log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$
Розв'язання. $x - 5 = 2^3$, $x = 13$ **Відповідь:** 13	**Розв'язання.** $\begin{cases} x = 2x - 1, \\ x > 0 \end{cases}$ (при цьому ОДЗ початкового рівняння врахована). Тоді $\begin{cases} x = 1, \\ x > 0 \end{cases}$ тобто $x = 1$ **Відповідь:** 1	**Розв'язання.** Оскільки $5 > 1$, то функція $y = \log_5 t$ — зростаюча і, враховуючи ОДЗ, одержуємо $\begin{cases} 2x > x - 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$. Звідси $\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$, тобто $x > 1$ **Відповідь:** $(1; +\infty)$	**Розв'язання.** Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функція $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ — спадна, і, враховуючи ОДЗ, одержуємо $\begin{cases} 2x < x - 1 \\ 2x > 0 \end{cases}$. Звідси $\begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$ — розв'язків немає **Відповідь:** розв'язків немає

Схема розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь і нерівностей

Розв'язування логарифмічних рівнянь

- ***Використання рівнянь-наслідків***
  У кінці — перевірка підстановкою у початкове рівняння (див. табл. 40)
- ***Використання властивостей відповідних функцій***
  (див. табл. 43)
- ***Використання рівносильних перетворень***
  (на ОДЗ заданого) (див. табл. 40 і 41)

Розв'язування логарифмічних нерівностей

- ***Використання рівносильних перетворень***
  (на ОДЗ заданого) (див. табл. 40 і 41)
- ***Використання методу інтервалів***
  Для нерівності вигляду $f(x) \gtrless 0$ (див. табл. 40 і Додаток, с. 25)

Напрямок перетворень

1. За допомогою формул логарифмування і потенціювання **зводимо** рівняння чи нерівність **до найпростішого** (при цьому враховуємо ОДЗ початкового і стежимо за тим, щоб не втратити корені при звужуванні ОДЗ)
2. Після перетворень (якщо не вдалося звести до найпростішого) пробуємо **ввести заміну змінних**

Приклади розв'язування деяких логарифмічних рівнянь

Використання формул логарифмування і потенціювання	Заміна змінної і перехід до однієї основи логарифмів (бажано до числової основи, інакше можлива втрата коренів)	Використання властивостей функцій (див. табл. 43)
$\log_2(x+1)+0{,}5\log_2(x-4)^2=1+\log_2 3$ **Розв'язання** Враховуючи, що на ОДЗ ($x>-1$ і $x\neq 4$) $\log_2(x-4)^2=2\log_2\lvert x-4\rvert$, одержуємо такі рівносильні перетворення (на ОДЗ): $\log_2(x+1)+\log_2\lvert x-4\rvert-\log_2 3=1$; $\log_2\frac{(x+1)\lvert x-4\rvert}{3}=1$; $\frac{(x+1)\lvert x-4\rvert}{3}=2^1$; $(x+1)\lvert x-4\rvert=6$. При $x-4\geq 0$ (*) маємо $(x+1)(x-4)=6$; $x^2-3x-10=0$; $x_1=-2$ — не входить в ОДЗ, $x_2=5$ — корінь (входить в ОДЗ і задовольняє (*)). При $x-4<0$ одержуємо $-(x+1)(x-4)=6$; $x^2-3x+2=0$; $x_1=1$ — корінь, $x_2=2$ — корінь. **Відповідь:** 1; 2; 5	$\log_{2x}2+2\log_{4x}8=4$ **Розв'язання** Перейшовши до основи 2, одержуємо рівносильні рівняння $\frac{\log_2 2}{\log_2(2x)}+2\frac{\log_2 8}{\log_2(4x)}=4$; $\frac{1}{\log_2 2+\log_2 x}+2\frac{3}{\log_2 4+\log_2 x}=4$. Заміна: $\log_2 x=t$, $\frac{1}{1+t}+\frac{6}{2+t}=4$. Тоді $4t^2+5t=0$; $t_1=0$; $t_2=-\frac{5}{4}$; $\log_2 x=0$; $\log_2 x=-\frac{5}{4}$; $x=2^0=1$; $x=2^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$ **Відповідь:** 1; $\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$	$\log_2 x+\log_3 x=1-x$ **Розв'язання** Функція $f(x)=\log_2 x+\log_3 x$ зростає на області визначення ($x>0$) як сума двох зростаючих функцій, а $g(x)=1-x$ спадає. Тому задане рівняння має єдиний корінь $x=1$ ($\log_2 1+\log_3 1=1-1$; $0=0$). **Відповідь:** 1

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ*

Поняття системи та її розв'язків

Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь чи нерівностей з однією або кількома змінними, то кажуть, що треба розв'язати **систему** рівнянь або нерівностей.

Розв'язком системи називається таке значення змінної або такий упорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), **що задовольняє одразу всім рівнянням (нерівностям) системи**, тобто розв'язком системи двох або більше рівнянь (чи нерівностей) з n невідомими називається така упорядкована множина з n чисел (інколи кажуть — упорядкована «ен»-ка чисел), при підстановці яких у систему замість невідомих усі рівняння (чи нерівності) перетворюються на правильні числові рівності (чи нерівності).

Розв'язати систему рівнянь чи нерівностей — значить знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною

Приклади систем

$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними

Пара (2; −3), тобто $\begin{cases} x = 2, \\ y = -3 \end{cases}$ — розв'язок системи

$\begin{cases} x^2 - y + z = 0, \\ xy + xz + yz = 19, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь з трьома змінними

Трійка (1; 4; 3), тобто $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ — один із розв'язків системи

$\begin{cases} x - y > 5, \\ 2x + y < 1, \\ x^2 + y + 6 \ge 0 \end{cases}$ — система трьох нерівностей з двома змінними

Пара (0; −6), тобто $\begin{cases} x = 0, \\ y = -6 \end{cases}$ — один із розв'язків системи

Зауваження. Не слід змішувати поняття системи з **поняттям сукупності** рівнянь і нерівностей (чи їх систем). А саме:

Розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей чи їх систем) — **означає знайти такі значення змінної** або такі набори значень змінних (якщо змінних декілька), **кожний з яких є розв'язком хоча б одного з рівнянь (чи нерівностей)**, що входять у сукупність, і **при цьому вся решта рівнянь (чи нерівностей)** сукупності **визначена**, або довести, що таких наборів чисел не існує

Приклад сукупності

Рівняння $\sqrt{2x+4}\,(x^2 + 2x - 3) = 0$ рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+4} = 0, & (1) \\ x^2 + 2x - 3 = 0 & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+4} = 0, & (1) \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ 2x + 4 \ge 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Рівняння (1) має корінь $x = -2$ (при цьому рівняння (2) визначено).
Рівняння (2) має корені $x_1 = 1$ (при цьому рівняння (1) визначено) і $x_2 = -3$ (при цьому рівняння (1) не визначено).
Розв'язок сукупності, (а отже, і початкового рівняння): $x = -2$, $x = 1$

---

* Див. Додаток, с. 52.

Системи-наслідки і рівносильні системи

Наслідки	Рівносильні системи
Якщо кожний розв'язок першої системи рівнянь є розв'язком другої системи, то друга система називається **наслідком** першої. При використанні систем-наслідків можлива поява сторонніх розв'язків, тому при використанні систем-наслідків перевірка підстановкою розв'язку у початкову систему є складовою частиною розв'язку системи	Дві системи рівнянь (чи нерівностей) називаються **рівносильними** на деякій множині, якщо вони на цій множині мають однакові розв'язки, тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої і, навпаки, кожний розв'язок другої є розв'язком першої. Як і для рівнянь, **усі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи.** ***ОДЗ (областю допустимих значень) системи називається спільна область визначення для всіх функцій, що входять до запису цієї системи***

Схема розв'зування систем рівнянь і нерівностей

Розв'язування систем рівнянь

Розв'язування систем нерівностей

Використання систем-наслідків
У кінці **перевірка** підстановкою у початкову систему

Використання рівносильних перетворень (на ОДЗ початкової системи)

Для систем нерівностей з однією змінною ***використання методу інтервалів*** для розв'язування нерівностей (див. табл. 40)

Використання властивостей відповідних функцій

Графічне розв'язування
(для систем с двома змінними)

Основні твердження про рівносильність систем

Властивості рівносильності систем	Приклад
1. Якщо змінити порядок рівнянь (чи нерівностей) заданої системи, то одержимо систему, рівносильну заданій	Розв'язати систему $\begin{cases} xy + y = 3, \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
2. Якщо одне з рівнянь (чи нерівностей) системи замінити на рівносильне йому рівняння (чи нерівність), то одержимо систему, рівносильну заданій	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)(x + 2y) = 0 \\ xy + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \text{ або } x + 2y = 0 \\ xy + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
3. Якщо перше рівняння деякої системи, наприклад $\begin{cases} f_1(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0, \end{cases}$ рівносильне сукупності, що складається з k рівнянь $\varphi_1(x; y) = 0,\ \varphi_2(x; y) = 0,\ \ldots,\ \varphi_k(x; y) = 0$, то задана система рівносильна сукупності k систем $\begin{cases} \varphi_1(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} \varphi_2(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0 \end{cases}$ або ... $\begin{cases} \varphi_k(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0 \end{cases}$ (аналогічно для систем нерівностей)	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0, \\ xy + y - 3 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ xy + y \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ xy + y - 3 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -2y, \\ xy + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

Властивості рівносильності систем	Приклад (продовження)
4. Якщо в системі рівнянь з одного рівняння виразити одну змінну, наприклад x, через інші і одержаний вираз підставити замість x в усі інші рівняння системи, то одержимо систему, рівносильну заданій	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 2y^2 + y - 3 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -2y, \\ -2y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (розв'язків немає) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 1 \text{ або } y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$ (за властивістю 3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 2y, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -6, \\ y = -3 \end{cases}$ **Відповідь:** (2; 1), (–6; –3)
5. Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого рівняння, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій	**Приклад.** Розв'язати систему $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 23x = 23, \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ **Відповідь:** (1; 1)

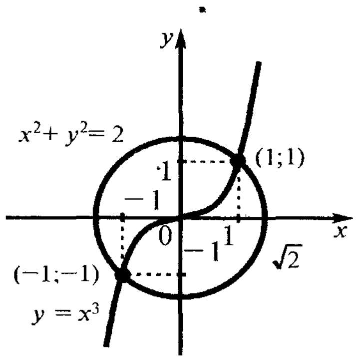
Графічне розв'язування систем з двома змінними

Виконуємо рівносильні перетворення системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь (чи нерівностей), що входять до системи. Будуємо графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній (чи областей) — ці координати і є розв'язками системи

Приклади

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3 \end{cases}$$

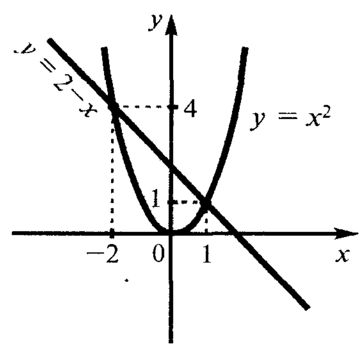


Графік першого рівняння — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$. Ці два графіки перетинаються в двох точках з координатами (–1; –1) і (1; 1)

Відповідь: (–1; –1), (1; 1) — розв'язки системи

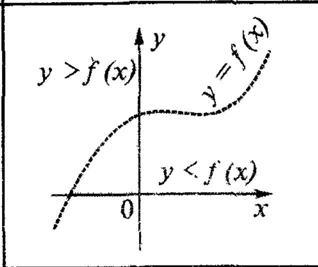
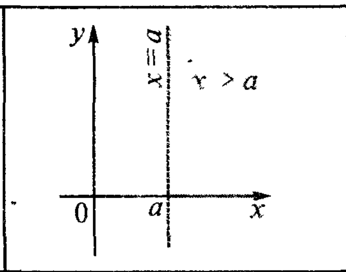
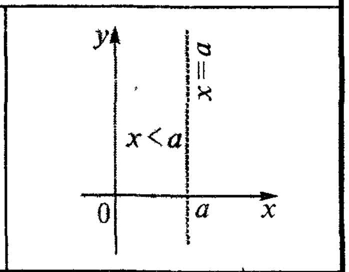
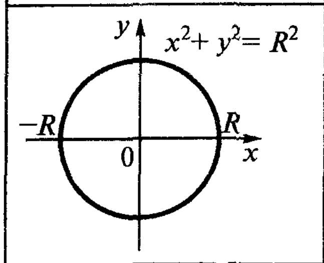
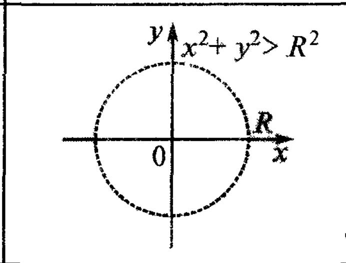
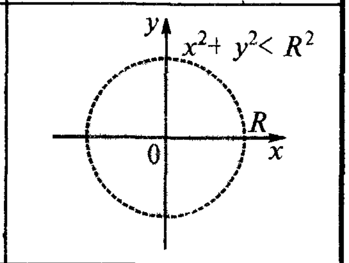
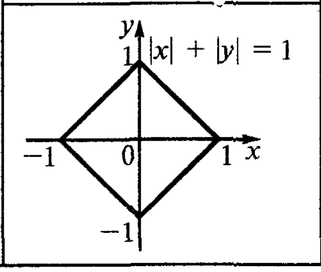
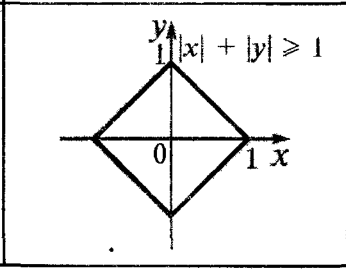
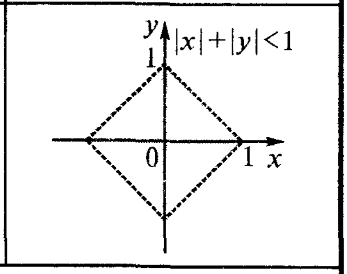
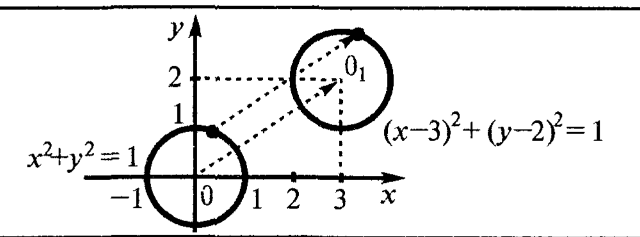
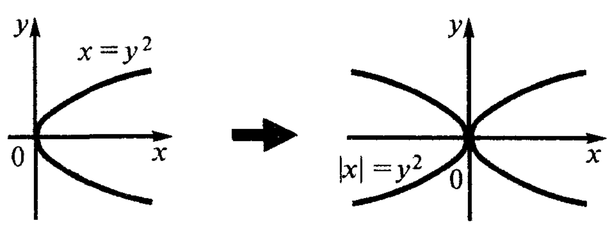
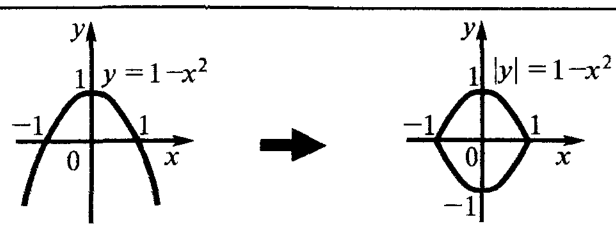
Зобразити на координатній площині розв'язки системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ x + y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 2 - x \end{cases}$$



Графік першої нерівності — усі точки координатної площини, що лежать вище від параболи $y = x^2$ і на самій параболі, а графік другої нерівності — усі точки, що лежать нижче від прямої $y = 2 - x$ і на самій прямій. Перетином цих двох графіків є заштрихована область

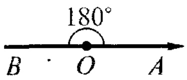
Таблиця 56

<table>
<tr><th colspan="4">ГРАФІКИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ДВОМА ЗМІННИМИ</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th colspan="3">Графіки деяких рівнянь і нерівностей</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними x і y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де пара $(x; y)$ є розв'язком відповідного рівняння (нерівності)</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><th colspan="4">Елементарні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$</th></tr>
<tr><th>Формула залежності</th><th colspan="2">Приклад</th><th>Перетворення</th></tr>
<tr><td>$F(x - a;\ y - b) = 0$</td>
<td colspan="2">
</td>
<td>Паралельне перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ на вектор $\overline{n}\ (a; b)$</td></tr>
<tr><td>$F(\mid x \mid; y) = 0$</td>
<td colspan="2">
</td>
<td>Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ праворуч від осі $0y$ (і на самій осі) залишається без зміни, і ця ж сама частина відображується симетрично відносно осі $0y$</td></tr>
<tr><td>$F(x; \mid y \mid) = 0$</td>
<td colspan="2">
</td>
<td>Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вище від осі $0x$ (і на самій осі) залишається без зміни, і ця ж сама частина відображується симетрично відносно осі $0x$</td></tr>
</table>

Таблиця 57

ТРИГОНОМЕТРІЯ. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

У градусах

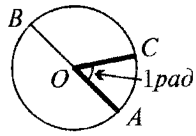


Означення

$1^\circ = \frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута

$1^\circ = 60'$	$1'$ — одна хвилина	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$
$1' = 60''$	$1''$ — одна секунда	$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$

У радіанах



Означення

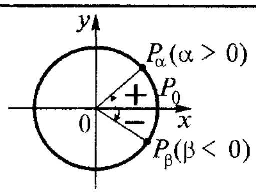
1 радіан — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола

$\angle AOC = 1$ рад. $\Leftrightarrow$ Довжина $\cup AC = OA = R$

$\angle AOB = 180^\circ$ — $\angle AOB$ — розгорнутий — $\angle AOB = \pi$ (радіан)

У градусах	У радіанах
$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан	1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$

Додатні та від'ємні кути в колі



Розглянемо коло з центром в початку координат. Позначимо точку кола на додатному напрямку осі $0x$ через P_0 (P_0 — початкова точка, а OP_0 — початковий радіус). Кут повороту радіуса OP_0 проти годинникової стрілки вважається додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним

$OP_0 \longrightarrow OP_\alpha$ повернули на кут α проти годинникової стрілки $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$

$OP_0 \longrightarrow OP_\beta$ повернули на кут β за годинниковою стрілкою $\Leftrightarrow$ $\beta < 0$

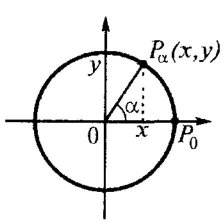
Таблиця 58

ОЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ

Через одиничне коло ($R = 1$)

$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α

$\cos\alpha = x$ — абсциса точки P_α



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

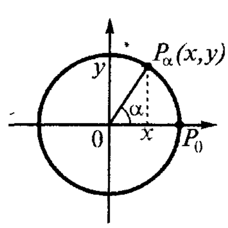
Через довільне коло (R — радіус кола)

$\sin\alpha = \frac{y}{R}$

$\cos\alpha = \frac{x}{R}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$



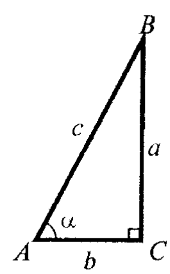
Через прямокутний трикутник (для гострих кутів)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$



sin (числа α) = sin (кута в α радіан)

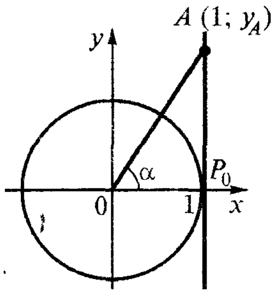
(аналогічно і для інших функцій)

Наочне зображення тангенса і котангенса в одиничному колі

AP_0 — **вісь тангенсів**
$AP_0 \parallel 0y$

За загальним означенням

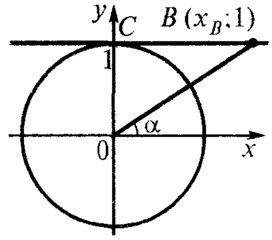
$\boxed{\mathbf{tg}\alpha = \dfrac{y_A}{1} = y_A}$ — ордината відповідної точки осі тангенсів



CB — **вісь котангенсів**
$CB \parallel 0x$

За загальним означенням

$\boxed{\mathbf{ctg}\alpha = \dfrac{x_B}{1} = x_B}$ — абсциса відповідної точки осі котангенсів

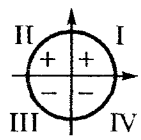


Значення тригонометричних функцій деяких кутів

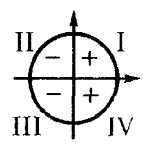
α	град.	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cosα		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tgα		0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctgα		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Знаки тригонометричних функцій

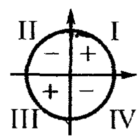
sinα



cosα



tgα, ctgα



Деякі властивості тригонометричних функцій

Парність і непарність

$\boxed{\mathbf{cos}(-\alpha) = \mathbf{cos}\alpha}$ — парна

$\mathbf{sin}(-\alpha) = -\mathbf{sin}\alpha$
$\mathbf{tg}(-\alpha) = -\mathbf{tg}\alpha$ — непарна
$\mathbf{ctg}(-\alpha) = -\mathbf{ctg}\alpha$

Періодичність

sin*x*, cos*x* — період $T = 2\pi$

Тоді $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$,
$\cos(x + 2\pi k) = \cos x \quad (k \in Z)$

tg*x*, ctg*x* — період $T = \pi$

Тоді $\mathrm{tg}(x + \pi k) = \mathrm{tg}x$,
$\mathrm{ctg}(x + \pi k) = \mathrm{ctg}x \quad (k \in Z)$

Якщо T — період функції, то ±2T, ±3T, ..., ±kT — також періоди цієї функції (k ∈ N)

Наприклад,

$T = 2\pi$ — спільний період для всіх функцій sin*x*, cos*x*, tg*x*, ctg*x*

Таблиця 59

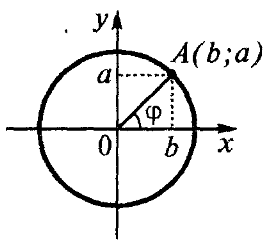
СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ — основна тригонометрична тотожність

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$	$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha = 1$ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} k,\ k \in Z$
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$	

Корисна властивість

Якщо сума квадратів двох чисел дорівнює одиниці, то одне з них можна вважати синусом, а друге — косинусом деякого кута φ



Нехай $a^2 + b^2 = 1$.

Візьмемо $A\ (b,\ a)$.

Тоді $OA = \sqrt{b^2 + a^2} = 1$

Тому $a = \sin\varphi,\ \ b = \cos\varphi$

Таблиця 60

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Це зведення тригонометричних функцій від аргументів типу $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\ \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\ \ (k \in Z)$ до тригонометричних функцій від аргументу α

Основні формули зведення

x	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Мнемонічне правило

1. Якщо до числа α додається число $k\pi$ ($k \in Z$) (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\ \frac{\pi}{2}$ (на вертикальному діаметрі), то функція змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс).
2. Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим

Приклад

І спосіб. $\mathrm{tg}(\frac{7\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ — назва функції змінюється, *оскільки* $\frac{7\pi}{2}$ *зображується на вертикальному діаметрі (внизу), і якщо* α — гострий кут, то $\frac{7\pi}{2} + \alpha$ знаходиться в IV чверті, де тангенс від'ємний (узято знак «–»)

ІІ спосіб.

$$\mathrm{tg}(\frac{7\pi}{2} + \alpha) = \mathrm{tg}(\underbrace{3\pi}_{\text{період}} + \frac{\pi}{2} + \alpha) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$$

Формули доповняльних кутів

Два кути називають **доповняльними**, якщо їх сума дорівнює $\frac{\pi}{2}$ (90°)

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ $\quad$ $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ $\quad$ $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ $\quad$ $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

Таблиця 61

ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ І НАСЛІДКИ З НИХ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \ \cos\beta - \cos\alpha \ \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \ \sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}$$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}$$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \neq \pi k,\ \ k \in Z$

$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\beta - \mathrm{ctg}\alpha}$$

$\alpha,\ \beta,\ \alpha - \beta \neq \pi k,\ \ k \in Z$

Формули подвійних і потрійних кутів (аргументів)

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$$

$2\alpha,\ \alpha \neq \pi k,\ \ k \in Z$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k + 1),\ \ k \in Z$

$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{3\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$\alpha \neq \frac{\pi k}{3},\ \ k \in Z$

Формули пониження степеня

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Формули половинного аргументу

(Знак перед коренем вибирається в залежності від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \quad \alpha \neq 2\pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$$

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

$\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	$\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$

Таблиця 62

ПЕРЕТВОРЕННЯ СУМИ (РІЗНИЦІ) ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТОК

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \qquad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \qquad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \alpha, \beta \neq \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \alpha, \beta \neq \pi k,\ k \in Z$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Введення допоміжного аргументу

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sin(\alpha + \varphi),$$

де φ визначається з умов $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Перетворення добутку тригонометричних функцій на суму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

Таблиця 63

ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛ, ЩО ЗВУЖУЮТЬ ОДЗ, ДЛЯ РОЗВ'ЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Якщо для розв'язування рівнянь чи нерівностей доводиться виконувати перетворення, що звужують ОДЗ початкового рівняння чи нерівності, то ті значення, на які звужується ОДЗ, треба розглядати окремо (див. також табл. 42)

Використовувана формула (зліва направо)	Які значення треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового
$\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ $\mathrm{tg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,x\ \mathrm{tg}\,\alpha}$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z)$ $\mathrm{tg}\,2x = \dfrac{2\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,x}$ $\mathrm{ctg}(x \pm \alpha) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,x\ \mathrm{ctg}\,\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,x}$ $(\alpha \neq \pi n,\ n \in Z)$ $\mathrm{ctg}\,2x = \dfrac{\mathrm{ctg}^2 x - 1}{2\mathrm{ctg}\,x}$	$x = \pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\cos x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Приклад використання формул, що звужують ОДЗ	Коментар
Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ (1)	Якщо скористатися першими двома формулами даної таблиці, то ми зведемо всі тригонометричні вирази в цьому рівнянні і до одного аргументу, і до однієї функції — $\operatorname{tg} x$ (див. також табл. 67). Але при використанні зазначених формул відбувається звуження ОДЗ на значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, і можна втратити корені рівняння, якщо числа такого виду входили в ОДЗ початкового рівняння і є його коренями. Щоб цього не сталося, розіб'ємо розв'язування на дві частини
Розв'язання 1. Якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, то з рівняння одержуємо $\operatorname{ctg}^2(\frac{\pi}{2} + \pi k) - \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{\pi}{4}) = 1$, тобто $0^2 - (-1) = 1$ — правильна рівність. Отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — корені рівняння (1)	Підставляємо ті значення, на які звужується ОДЗ, у рівняння (1). При обчисленнях враховуємо періодичність (табл. 60) і формули зведення (табл. 62)
2. Якщо $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, одержуємо $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1.$ (2) **Заміна** $\operatorname{tg} x = t$ Одержуємо рівняння $\frac{1}{t^2} - \frac{t+1}{1-t} = 1$, яке при $t \neq 0$ і $t \neq 1$ рівносильне рівнянню $2t^2 + t - 1 = 0$. Звідси $t_1 = -1,\ t_2 = \frac{1}{2}$. **Обернена заміна** дає $\operatorname{tg} x = -1$ або $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, тобто $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, або $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$	При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (з ОДЗ рівняння (1)) використання формул $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ і $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$ призводить до рівняння, яке рівносильне заданому (на тій частині ОДЗ, де $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$), бо ці формули зберігають правильну рівність як при переході від рівності (1) до рівності (2), так і при оберненому переході — від (2) до (1) (див. також табл. 41). Заміна змінної (і обернена заміна) також призводить до рівняння, рівносильного даному (на зазначеній частині ОДЗ початкового рівняння). Зауважимо, що ОДЗ рівняння (2) відрізняється від ОДЗ рівняння (1) лише тим, що до неї не входять значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, які входять до ОДЗ рівняння (1). Оскільки ці «погані» значення ми врахували у процесі розв'язування, то ОДЗ рівняння (1) можна в явному вигляді не фіксувати (як у наведеному розв'язанні)
Відповідь: 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$	У відповіді записуємо всі корені, які було одержано в першій і другій частинах розв'язання

Таблиця 64

ФУНКЦІЇ $y = \sin x$, $y = \cos x$ ТА ЇХ ГРАФІКИ

$y = \sin x$
(означення див. у табл. 58)

1. ***Область визначення***

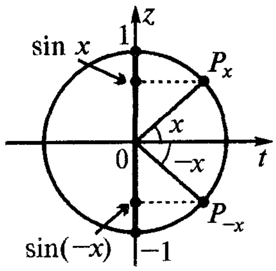
x — будь-яке число

$\boxed{D(\sin x) = \mathbf{R}}$

2. ***Множина значень***

відрізок [-1; 1]

$\boxed{E(\sin x) = [-1;\ 1]}$



$y = \cos x$
(означення див. у табл. 58)

1. ***Область визначення***

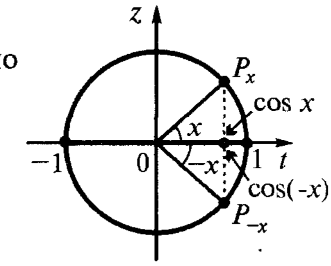
x — будь-яке число

$\boxed{D(\cos x) = \mathbf{R}}$

2. ***Множина значень***

відрізок [-1; 1]

$\boxed{E(\cos x) = [-1;\ 1]}$



3. ***Функція непарна***

$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$,

тобто графік симетричний відносно початку координат

3. ***Функція парна***

$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$,

тобто графік симетричний відносно осі $0y$

4. ***Функція періодична*** з найменшим додатним періодом

$$\boxed{T = 2\pi}$$

$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}$ $\qquad$ $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}$

Тому форма графіка повторюється через 2π (його можна одержати з будь-якої частини графіка на інтервалі завдовжки 2π за допомогою паралельного перенесення цієї частини уздовж осі $0x$ на $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ — див. нижче графік)

5. ***Точки перетину з осями координат***

$y = \sin x$	$y = \cos x$
$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sin 0 = 0 \end{cases}$ — графік проходить через початок координат	$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \cos 0 = 1 \end{cases}$
$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ (\sin x = 0 \text{ при } x = \pi k), \\ x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$	$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ (\cos x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k), \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

6. ***Проміжки знакосталості***

$y = \sin x$	$y = \cos x$
$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$	$\cos x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$
$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$	$\cos x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

7. ***Функція неперервна і має похідну для будь-якого значення аргументу***

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ $\qquad$ $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

8. ***Проміжки монотонності***

$y = \sin x$	$y = \cos x$
Функція **sinx зростає** в кожному з проміжків $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$ і **спадає** в кожному з проміжків $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$	Функція **cosx зростає** в кожному з проміжків $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$ і **спадає** в кожному з проміжків $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$

9. *Екстремуми*

Функція набуває найбільшого значення, що дорівнює 1 $y_{max} = 1$ в точках

$y = \sin x$	$x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

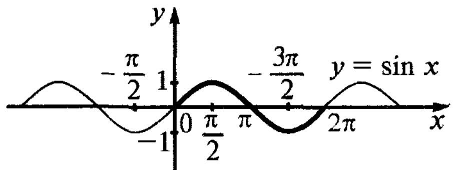
$y = \cos x$	$x_{max} = 2\pi k,\ k \in Z$

Функція набуває найменшого значення, що дорівнює −1 $y_{min} = -1$ в точках

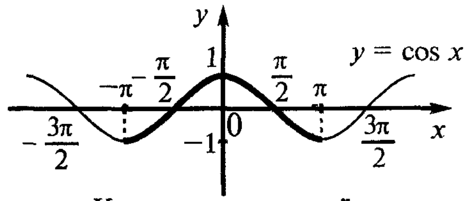
$y = \sin x$	$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$y = \cos x$	$x_{min} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

10. *Графік*



Крива — **синусоїда**



Крива — **косинусоїда**

Оскільки $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (табл 60), то графік функції $y = \cos x$ можна одержати з синусоїди $y = \sin x$ паралельним перенесенням уздовж осі $0x$ на $(-\frac{\pi}{2})$ (табл. 32)

Таблиця 65

ФУНКЦІЇ $y = \text{tg}x$, $y = \text{ctg}x$ ТА ЇХ ГРАФІКИ

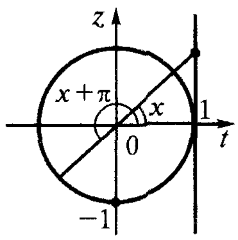
$y = \text{tg}x$ (означення див. у табл. 58)

1. *Область визначення*

$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z}$

2. *Множина значень*
уся числова пряма, тобто

$\boxed{E(\text{tg}x) = R}$



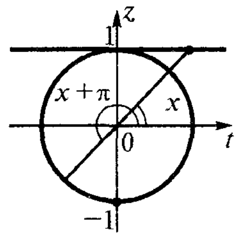
$y = \text{ctg}x$ (означення див. у табл. 58)

1. *Область визначення*

$\boxed{x \neq \pi k,\ \ k \in Z}$

2. *Множина значень*
уся числова пряма, тобто

$\boxed{E(\text{ctg}x) = R}$



3. *Функція непарна*

$\boxed{\text{tg}(-x) = -\text{tg}x}$ $\boxed{\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}x}$

(тобто графік симетричний відносно початку координат)

4. *Функція періодична* з найменшим додатним періодом $\boxed{T = \pi}$

$\boxed{\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}x}$ $\boxed{\text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg}x}$

Тому форма графіка повторюється через π (його можна одержати з будь-якої частини графіка на інтервалі завдовжки π за допомогою паралельного перенесення цієї частини вздовж осі 0x на πk, $k \in Z$ (див. нижче графік)

5. *Точки перетину з осями координат*

$\boxed{0y}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \text{tg}0 = 0 \end{cases}$ — графік проходить через початок координат

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ \ (\text{tg}x = 0 \text{ при } x = \pi k) \\ x = \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

Перетину з віссю $\boxed{0y}$ немає ($x \neq 0$ по області визначення)

$\boxed{0x}$ $\begin{cases} y = 0 \ \ (\text{ctg}x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k) \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

6. *Проміжки знакосталості*

$\text{tg}x > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$	$\text{ctg}x > 0$ при $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$
$\text{tg}x < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$	$\text{ctg}x < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

7. *Функція неперервна в кожній точці своєї області визначення* (і на будь-якому інтервалі, що входить до області визначення) і ***має похідну*** для будь-якого значення аргументу з області визначення функції

$$\boxed{(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \boxed{(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

8. *Проміжки монотонності*

Функція **tg*x* зростає** в кожному з проміжків $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

Функція **ctg*x* спадає** в кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$

При цьому функція набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$, тому найбільшого та найменшого значення функція не має

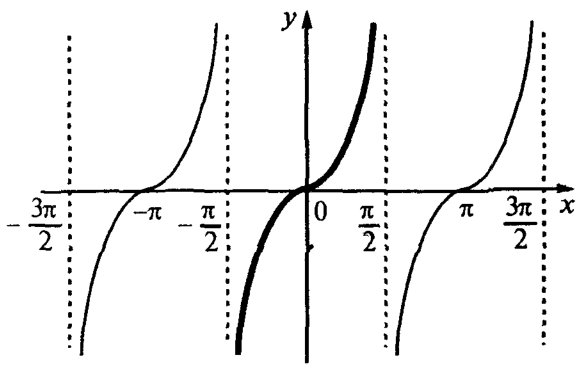
9. *Асимптоти* (див. табл. 31)

1) при $x \to -\frac{\pi}{2}$ справа
$y = \text{tg}x \to -\infty$;
2) при $x \to \frac{\pi}{2}$ зліва
$y = \text{tg}x \to +\infty$, тобто
$x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ — **вертикальні асимптоти**,
а враховуючи періодичність
і $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

1) при $x \to 0$ справа
$y = \text{ctg}x \to +\infty$;
2) при $x \to \pi$ зліва
$y = \text{ctg}x \to -\infty$, тобто
$x = 0$ и $x = \pi$ — **вертикальні асимптоти**,
а враховуючи періодичність
і $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

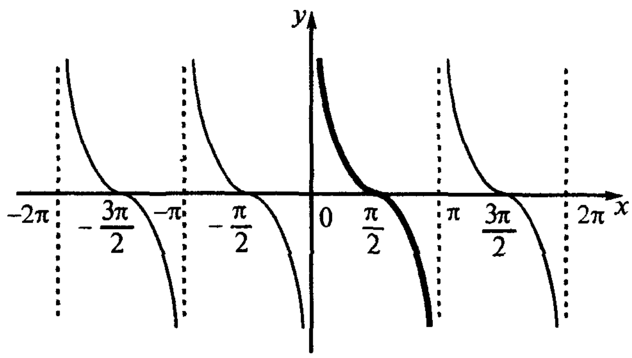
10. *Графік*

y* = tg*x



Крива — **тангенсоїда**

y* = ctg*x



Крива — **котангенсоїда**

Оскільки $\text{ctg}x = -\text{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ (табл. 62), то графік функції $y = \text{ctg}x$ — тангенсоїда ($y = \text{tg}x$), симетрично відображена відносно осі 0x і паралельно перенесена вздовж осі 0y на $\frac{\pi}{2}$ (табл. 32)

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Означення виразів arcsin*a*, arccos*a*, arctg*a*, arcctg*a*

arcsin*a* ($|a| \le 1$)

Арксинусом числа a називається кут (число) з проміжку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус якого дорівнює a

$$\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\\ \sin\varphi = a\end{array}}$$

Приклади. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

arccos*a* ($|a| \le 1$)

Арккосинусом числа a називається кут (число) з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a

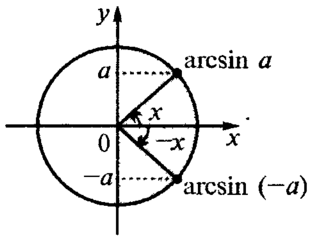
$$\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in [0; \pi]\\ \cos\varphi = a\end{array}}$$

Приклади. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(-1) = \pi$

З означення одержуємо формули

$\boxed{\sin(\arcsin a) = a}$

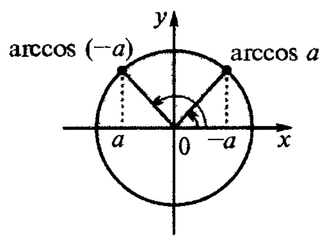
$\boxed{\arcsin(\sin\varphi) = \varphi, \text{ якщо } \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$



$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$

$\boxed{\cos(\arccos a) = a}$

$\boxed{\arccos(\cos\varphi) = \varphi, \text{ якщо } \varphi \in [0; \pi]}$



$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$

arctg*a*

Арктангенсом числа a називається кут (число) з проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс якого дорівнює a

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\\ \operatorname{tg}\varphi = a\end{array}}$$

Приклади. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

arcctg*a*

Арккотангенсом числа a називається кут (число) з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a

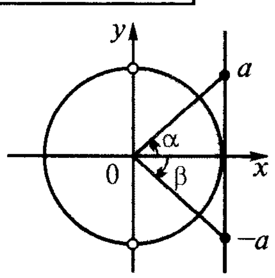
$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\varphi \in (0; \pi)\\ \operatorname{ctg}\varphi = a\end{array}}$$

Приклади. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

З означення одержуємо формули

$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$

$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \text{ якщо } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$

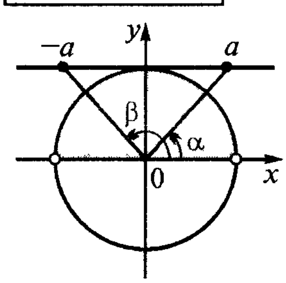


$\alpha = \operatorname{arctg} a$,
$\beta = \operatorname{arctg}(-a)$,
$\beta = -\alpha$, тобто

$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$

$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a}$

$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \text{ якщо } \alpha \in [0; \pi]}$

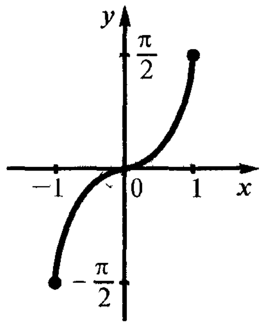
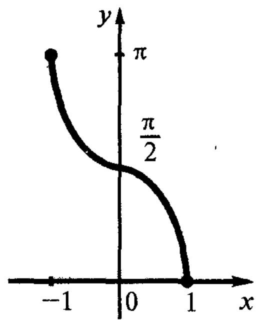
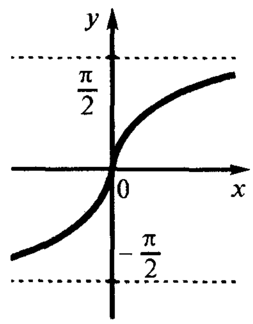
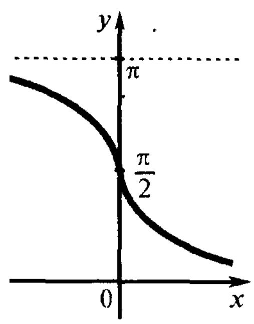


$\alpha = \operatorname{arcctg} a$,
$\beta = \operatorname{arcctg}(-a)$,
$\beta = \pi - \alpha$, тобто

$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$

Найпростіші співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}$$

Графіки обернених тригонометричних функцій				
Якщо функція зростає (спадає) на деякому інтервалі, то вона має обернену функцію на цьому інтервалі, причому графік оберненої функції є симетричним графіку прямої функції відносно прямої $y = x$ (див. табл. 30)				
Пряма функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Інтервал монотонності (з області визначення)	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (зростає)	$[0; \pi]$ (спадає)	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (зростає)	$(0; \pi)$ (спадає)
Множина значень прямої функції	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Позначення оберненої функції	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область визначення оберненої функції	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множина значень оберненої функції	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Графік оберненої функції				
Деякі особливості оберненої функції	Зростає і непарна	Спадає (ні парна, ні непарна)	Зростає і непарна	Спадає (ні парна, ні непарна)

Таблиця 67

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Найпростіші рівняння

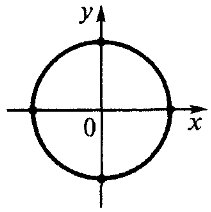
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a \rvert > 1$ → **Коренів немає** $\lvert a \rvert \le 1$ → $\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$	**Окремі випадки**  $\boxed{\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z}$ $\boxed{\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$ $\boxed{\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a \rvert > 1$ → **Коренів немає** $\lvert a \rvert \le 1$ → $\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z}$	$\boxed{\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$ $\boxed{\cos x = 1;\ x = 2\pi k,\ k \in Z}$ $\boxed{\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z}$
$\mathrm{tg}\,x = a$ $x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k,\ k \in Z$	$\boxed{\mathrm{tg}\,x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z}$
$\mathrm{ctg}\,x = a$ $x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi k,\ k \in Z$	$\boxed{\mathrm{ctg}\,x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$

Схема розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь*

1. Пробуємо всі тригонометричні функції звести **до одного аргументу**
2. Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести **до однієї функції**
3. Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння **до однорідного**
4. У решті випадків переносимо **всі члени в один бік** і пробуємо **одержати добуток** або **використовуємо спеціальні прийоми розв'язування**
5. Якщо в процесі розв'язування необхідне **відбирання коренів тригонометричного рівняння,** то **проводимо** відбирання **на одному періоді,** спільному для всіх функцій, що входять до запису рівняння (якщо він існує), а **потім відповідь періодично продовжуємо**

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному й тому ж вигляді, то зручно цей вигляд змінної позначити однією буквою (новою змінною)	**Приклад** Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ **Розв'язання. Заміна** $\sin x = t$. Одержуємо $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{2}$. Тоді $\sin x = 1$ або $\sin x = \frac{1}{2}$. Звідси $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

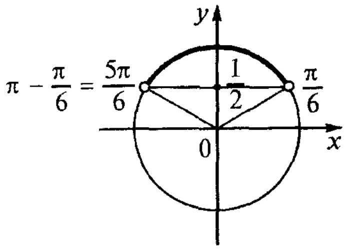
* Див. також Додаток, с. 35.

Таблиця 68

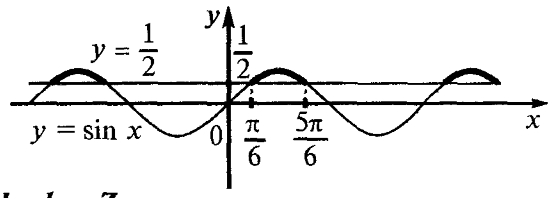
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Приклади розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

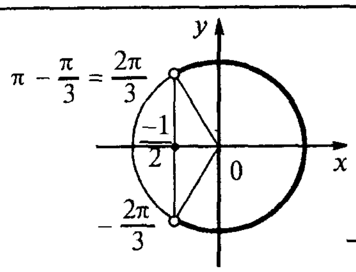
За допомогою одиничного кола	За допомогою графіка



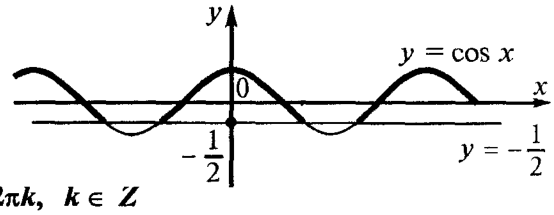
$\boxed{\sin x > \frac{1}{2}}$



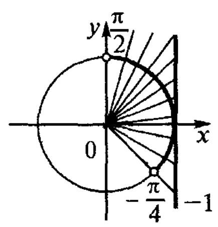
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z$$



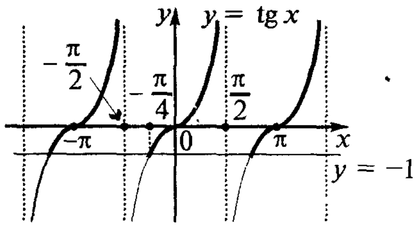
$\boxed{\cos x > -\frac{1}{2}}$



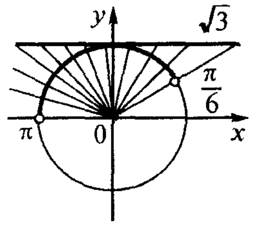
$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$$



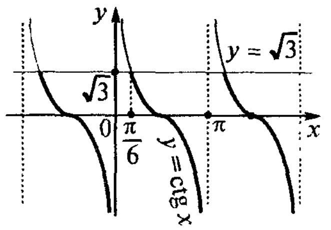
$\boxed{\operatorname{tg} x > -1}$



$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$



$\boxed{\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}}$



$$\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k, \quad k \in Z$$

Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей*

1. ***Використання рівносильних перетворень***, і зокрема зведення до алгебраїчної нерівності (за схемою: 1) до одного аргументу, 2) до однієї функції, 3) заміна (див. табл. 67)) і наступне розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних нерівностей
2. ***Використання методу інтервалів***

Схема розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів

1. **Звести** нерівність **до вигляду** $f(x) \gtrless 0$
2. **Знайти ОДЗ** нерівності
3. **Знайти** спільний період (якщо він існує) для всіх функцій, що входять до запису нерівності, тобто **період функції** $f(x)$ (див. табл. 29)
4. **Знайти нулі** $f(x)$: $f(x) = 0$
5. **Позначити нулі на ОДЗ всередині одного періоду і знайти знаки в кожному інтервалі**, на які розбивається ОДЗ (всередині одного періоду)
6. **Записати відповідь, ураховуючи період**

* Див також Додаток, с. 44.

Таблиця 69

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Поняття границі

Нехай задано деяку функцію, наприклад $f(x) = 2x + 3$
Розглянемо таблицю значень цієї функції в точках, які на числовій прямій розташовані досить близько до числа 2 (і в самій точці 2)

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	6,9998	7	7,0002	7,002	7,02	7,2

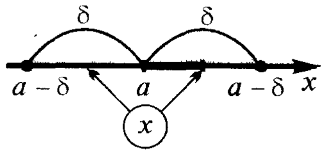
З таблиці видно, що чим ближче аргумент x до числа 2 (позначається $x \to 2$), тим ближче значення функції $f(x) = 2x + 3$ до числа 7 ($f(x) \to 7$). Записується це так: $\lim\limits_{x\to2}(2x+3) = 7$

У загальному випадку $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = B}$ означає

(*a* — число або один із символів ∞; $-\infty$; $+\infty$)

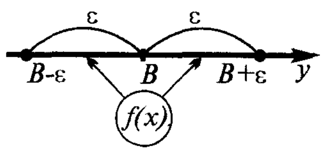
якщо $x \to a$, то $f(x) \to B$,
тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a

Математичний запис виразів $x \to a$ і $f(x) \to B$



$x \to a$
точка x знаходиться від точки a на малій відстані (менше δ)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{|x - a| < \delta \quad (\delta > 0)}$



$f(x) \to B$
значення $f(x)$ на числовій прямій знаходиться на малій відстані від B (менше ε)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{|f(x) - B| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)}$

Означення границі функції в точці

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = B}$

***Число B називається границею функції f(x) в точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного* ε *знайдеться таке додатне число* δ*, що при всіх* $x \neq a$*, які задовольняють нерівність* $|x - a| < \delta$*, виконується нерівність* $|f(x) - B| < \varepsilon$**

Властивості границі функції

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то **$B$ — єдине**

Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to a$, то ця границя — єдина

2. $\lim\limits_{x\to a} c = c$, де c — стала

Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій

3. $\boxed{f(x) \text{ — неперервна в точці } a \text{ функція}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

(за означенням неперервної функції)

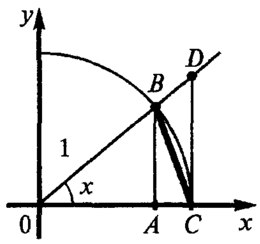
Границя неперервної функції при $x \to a$ дорівнює значенню функції в точці a

Теореми про границі

4.	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$	Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують
5.	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$	Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі співмножників існують
6.	$\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$	Сталий множник можна виносити за знак границі
7.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$	Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю

Перша визначна границя

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$



Обґрунтування

$S_{\Delta OBC}\le S_{\text{сект } OBC}\le S_{\Delta ODC}$, тоді

$\sin x\le x\le \operatorname{tg}x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Звідси $1\ge\dfrac{\sin x}{x}\ge\cos x$,

але $\cos x\to 1$ при $x\to 0$,

отже, $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$

Таблиця 70

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В НЕСКІНЧЕННОСТІ

Означення	Приклади
Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій. Число B називається границею $f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $M>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $\lvert x\rvert>M$, виконується нерівність $\lvert f(x)-B\rvert<\varepsilon$	1. При $x\to\infty$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\to 0$, тобто при великих (за модулем) значеннях x число $\dfrac{1}{x^2}$ дуже мало відрізняється від числа 0 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0}$
Якщо поведінка функції $f(x)$ різна при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$, то окремо розглядають $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (в означенні беруть $\lvert x\rvert=x$) і $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (в означенні беруть $\lvert x\rvert=-x$)	2. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}}$ (див. табл. 66) 3. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}}$ (див. табл. 66)

Границя послідовності

Оскільки послідовність є функцією натурального аргументу $a_n = f(n)$ (див. табл. 23), то означення границі послідовності при $n \to +\infty$ цілком збігається з означенням границі функції при $n \to +\infty$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — послідовність.
Якщо при $n \to +\infty$, $a_n \to B$, то

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = B}$$

Означення

Число B називається границею послідовності $a_n = f(n)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх $n > M$ виконується нерівність

$$|f(n) - B| < \varepsilon$$

тобто $|a_n - B| < \varepsilon$

Приклад

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

оскільки в цьому випадку $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$,

$$|a_n - B| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Тоді при $\varepsilon > 0$ $|a_n - B| < \varepsilon$ рівносильне $\frac{1}{n} < \varepsilon$, що рівносильно $n > \frac{1}{\varepsilon}$ і за M можна взяти $\frac{1}{\varepsilon}$ (або його цілу частину), наприклад, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то $M = \frac{1}{\varepsilon} = 100$ і для всіх $n > 100$

$$|a_n - B| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon = 0{,}01$$

Порівняння росту показникової, степеневої і логарифмічної функцій

При $a > 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^n}{x^n} = +\infty},$$

тобто

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^n} = 0}$$

Якщо $a > 1$, то при $x \to +\infty$ функція $y = a^x$ зростає швидше від будь-якої степеневої функції $y = x^n$, де n — натуральне число

Графічно це твердження означає, що ***при досить великих значеннях x графік функції $y = a^x$ (де $a > 1$) розташовано вище від графіка функції $y = x^n$***

При $a > 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\log_a x} = +\infty},$$

тобто

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{1}{n}}} = 0}$$

При великиих x:

$$x^{\frac{1}{n}} < x^n,$$

тому

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0}$$

Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ зростає повільніше, ніж функція $y = x^{\frac{1}{n}}$ (і тим більш повільніше, ніж функція $y = x$ або функція $y = x^n$, $n \in N$)

Графічно це твердження означає, що ***при досить великих значеннях x графік функції $y = \log_a x$ $(a > 1)$ розташовано нижче від графіка функції $y = x^{\frac{1}{n}}$ (і тим більш нижче від графіків функцій $y = x^n$, $n \in N$)***

Таблиця 71

ПРИЙОМИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Основні етапи	**Приклад**
1. Користуючись неперервністю функції $f(x)$, пробуємо підставити значення $x = a$ у функцію $f(x)$	$\lim\limits_{x \to 2} \frac{9 - x^2}{x - 1} = \frac{9 - 4}{2 - 1} = 5$
2. Якщо обчислюється границя при $x \to \infty$, то пробуємо в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{9x^4 + 2x^3}}{x^2 - 3x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - \sqrt{9 + \frac{2}{x}}\right)}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2} =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{9 + \frac{2}{x}}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - \sqrt{9 + 0}}{1 - 0 + 0} = -3$
3. Якщо в результаті підстановки $x = a$ одержали вираз типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, то	
а) пробуємо розкласти чисельник і знаменник на множники	$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x - 2)} =$ $= \lim\limits_{x \to 3} \frac{x + 3}{x - 2} = \frac{3 + 3}{3 - 2} = 6$
б) якщо до чисельника або знаменника входять вирази з квадратним чи кубічним коренем, то множимо чисельник і знаменник на відповідні вирази, щоб позбутися заданих коренів (іноді вводять заміну і вираз з коренем позначають новою змінною)	**1 спосіб.** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} =$ $= \lim\limits_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} (x + 4)(\sqrt{x} + 2) = 32$ **2 спосіб.** Позначимо $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$. При $x \to 4$ $t \to 2$. Тоді $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim\limits_{t \to 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2} = \lim\limits_{t \to 2} \frac{(t^2 - 4)(t^2 + 4)}{t - 2} =$ $= \lim\limits_{t \to 2} \frac{(t - 2)(t + 2)(t^2 + 4)}{t - 2} = \lim\limits_{t \to 2} (t + 2)(t^2 + 4) = 32$
в) якщо під знаком границі стоять тригонометричні або обернені тригонометричні функції, то такі границі зводяться до першої визначної границі $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ або до її варіацій $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x \cdot \cos 2x \cdot \mathrm{arctg}\, 3x}{\mathrm{tg}\, 7x \cdot \arcsin 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right) \cdot 5x \cdot \cos 2x \cdot \left(\frac{\mathrm{arctg}\, 3x}{3x}\right) 3x}{\left(\frac{\mathrm{tg}\, 7x}{7x}\right) \cdot 7x \cdot \left(\frac{\arcsin 4x}{4x}\right) 4x}$. Скоротивши чисельник і знаменник на змінні, що стоять за дужками, враховуючи, що $\lim\limits_{x \to 0} \cos 2x = 1$, і враховуючи першу визначну границю та її варіації, одержуємо $\frac{1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{15}{28}$

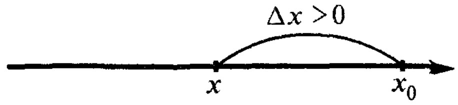
Таблиця 72

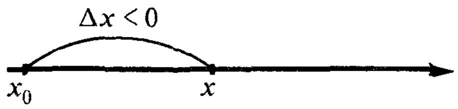
ПОХІДНА

Поняття приросту аргументу і функції

Приріст аргументу

$\boxed{\Delta x = x - x_0}$





Приріст функції

$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

Нехай x і x_0 — два значення аргументу (незалежної змінної) з області визначення функції $y = f(x)$.

Приростом аргументу (позначається Δx, читається «дельта ікс») називається різниця $x - x_0$. З рівності $\Delta x = x - x_0$ маємо $x = x_0 + \Delta x$, тобто початкове значення аргументу x_0 дістало приріст Δx. *Тоді значення функції змінилося на* величину $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що називається **приростом функції** $y = f(x)$ у точці x_0 (можна також позначати Δf або $\Delta f(x_0)$)

Означення похідної

$y = f(x)$

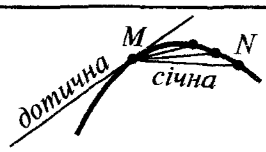
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x}$$

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції в точці x до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (можна позначити y' або $f'(x)$)

Операція знаходження похідної називається **диференціюванням**

Дотична до графіка функції і геометричний зміст похідної



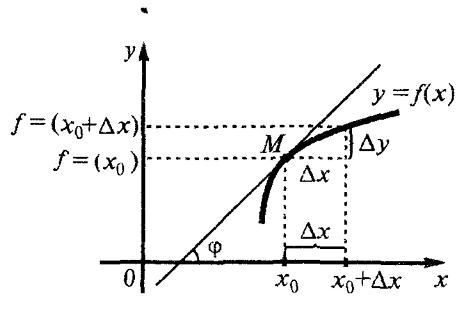
Дотичною до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN, коли точка N наближається вздовж кривої до точки M

$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi}$

k — кутовий коефіцієнт дотичної

$k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$)

$\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ — **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0



Значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює тангенсу кута нахилу цієї дотичної до осі $0x$ *(кут відлічується від додатного напрямку осі $0x$ проти годинникової стрілки)*

Фізичний зміст похідної

Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу; зокрема,

$S = S(t)$ — залежність пройденого шляху від часу	похідна за часом є міра швидкості зміни, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідна від функції, яка виражає залежність пройденого шляху S від часу t
$v = S'(t)$ — **швидкість** прямолінійного руху	
$a = v'(t)$ — **прискорення** прямолінійного руху	

Таблиця 73

ФОРМУЛИ І ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Формули

Елементарні функції	Складені функції
$c' = 0$ (*c* — стала)	
$x' = 1$	
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — стала)	$(u^{\alpha})' = \alpha\ u^{\alpha-1} \cdot u'$
Окремі випадки	
$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0$ — стала)	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\ u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\ u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Правила

$(c \cdot f(x))' = c f'(x)$

(*c* — стала)

Сталий множник можна виносити за знак похідної

Похідна суми

$(f+g)' = f' + g'$

Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних

Похідна добутку

$(f \cdot g)' = f' g + f g'$

Похідна частки

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$ $(g \neq 0)$

Похідна складеної функції (функції від функції)

Якщо $y = f(u)$ і $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, то

$(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$

Приклад

$(2x^4 + \sin^3 5x)' = (2x^4)' + (\sin^3 5x)' =$

$= 2(x^4)' + 3\sin^2 5x \cdot (\sin 5x)' =$

$= 2 \cdot 4x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\ (5x)' =$

$= 8x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\ 5(x)' =$

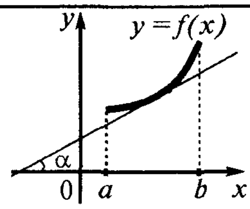
$= 8x^3 + 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Монотонність і сталість функції

Достатня умова зростання функції

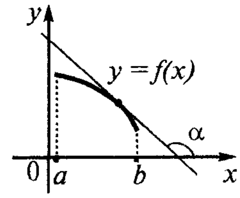
Якщо в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ ***зростає*** на цьому інтервалі



$0° < \alpha < 90°$

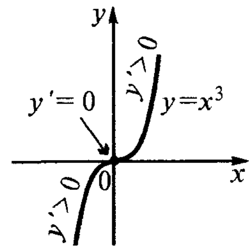
Достатня умова спадання функції

Якщо в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$ $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ ***спадає*** на цьому інтервалі

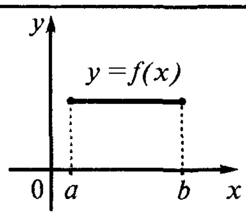


$90° < \alpha < 180°$

Зауваження. Ці умови є лише достатніми, але не є необхідними умовами зростання і спадання функції.
Наприклад, функція $y = x^3$ — зростаюча на всій області визначення, хоч у точці $x = 0$ її похідна $y = 3x^2$ дорівнює нулю



Необхідна і достатня умова сталості функції



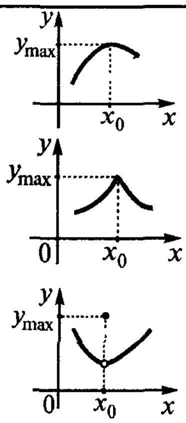
Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a;\ b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу

Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точка максимуму

Означення

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$

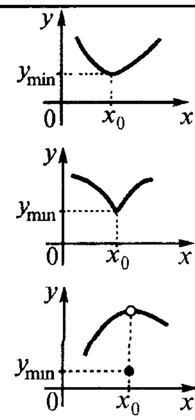


$\boxed{x_{max} = x_0 \text{ — точка максимуму}}$

Точка мінімуму

Означення

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$



$\boxed{x_{min} = x_0 \text{ — точка мінімуму}}$

Точки максимуму і мінімуму називаються ***точками екстремуму***

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називаються ***екстремумами функції*** *(максимумом і мінімумом функції)*

$\boxed{y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0) \text{ — максимум}}$

$\boxed{y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0) \text{ — мінімум}}$

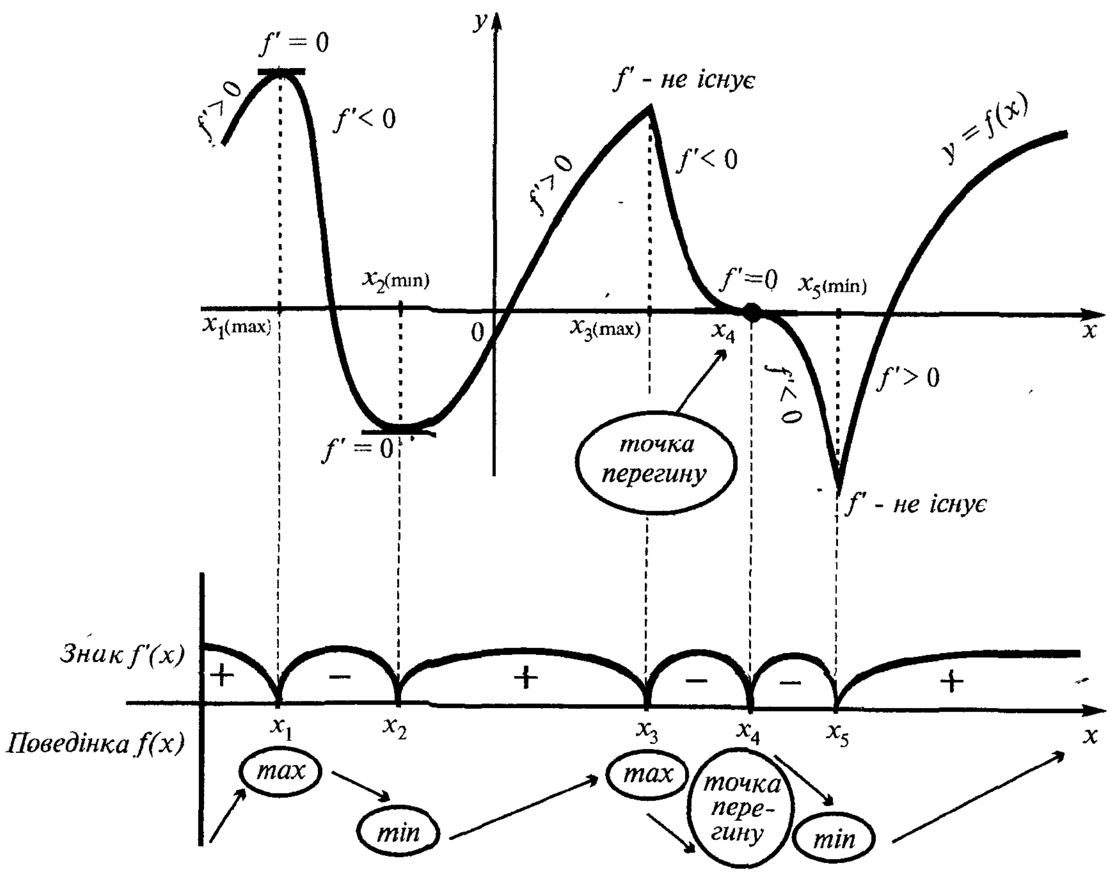
Критичні точки

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються критичними

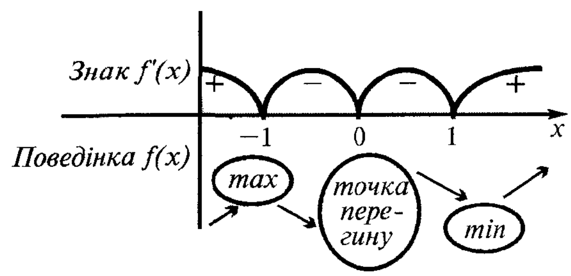
Необхідна умова екстремуму	**Достатня умова екстремуму**
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує	Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак в точці x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$
$\boxed{x_0 \text{ — **точка екстремуму**}}$ => $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ або } f'(x_0) \text{ — **не існує**}}$	$\boxed{\text{у точці } x_0 \text{ **знак** } f'(x) \text{ **змінюється з «+» на «–»**}}$ => $\boxed{x_0 \text{ — **точка максимуму**}}$
(але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум!)	$\boxed{\text{у точці } x_0 \text{ **знак** } f'(x) \text{ **змінюється з «–» на «+»**}}$ => $\boxed{x_0 \text{ — **точка мінімуму**}}$

Приклад графіка функції $y = f(x)$, що має екстремуми

(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)



Дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність і екстремуми

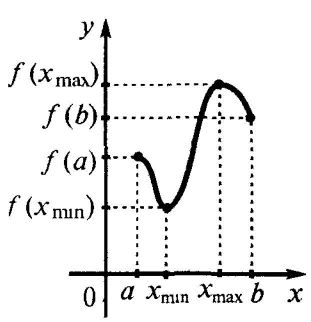
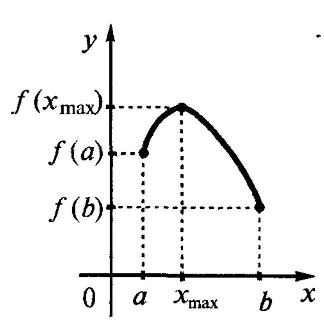
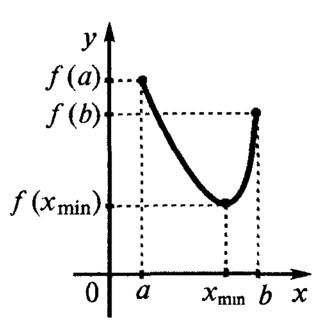
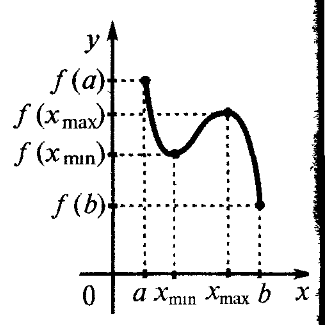
Схема	Приклад. $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Знайти область визначення і інтервали, на яких функція неперервна	Область визначення: $x \in R$ Функція неперервна в кожній точці своєї області визначення
2. Знайти похідну $f'(x)$	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) =$ $= 15x^2(x - 1)(x + 1)$
3. Знайти критичні точки, тобто внутрішні точки області визначення, в яких $f'(x) = 0$ або не існує	$f'(x)$ існує на всій області визначення $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному інтервалі, на які розбивається область визначення	
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму	
6. Записати потрібний результат дослідження (проміжки монотонності і екстремуми)	$f(x)$ зростає при $x \in (-\infty; -1)$ і при $x \in (1; +\infty)$ $f(x)$ спадає при $x \in (-1; 1)$ Точки екстремуму: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$ Екстремуми: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку

Властивість

Якщо функція f(x) неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка

Приклади

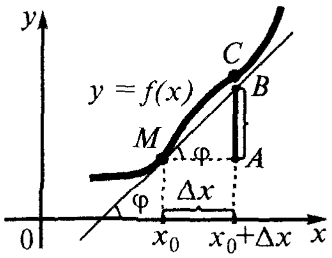
			
$\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(b)$	$\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a,\,b]} f(x) = f(b)$

Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку	
Схема	**Приклад** Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$ при $x \in [1; 3]$
1. Знайти похідну $f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. Знайти критичні точки ($f'(x) = 0$ або не існує)	$f'(x) = 0$ $(3x^2 + 6x - 24)$ при $x = -4$ і при $x = 2$
3. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку	Заданому відрізку [1; 3] належить лише критична точка $x = 2$
4. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку	$f(1) = 2$, $f(2) = -6$, $f(3) = 4$
5. Порівняти одержані значення і вибрати з них найменше і найбільше	$\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

Таблиця 75

ДИФЕРЕНЦІАЛ

Поняття диференціала



$\boxed{dy = df(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = AB}$

Для будь-якої точки x: $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$

якщо $f(x) = x$, маємо $dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$,

тоді $dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$

Приклад. $d(x^5) = (x^5)' \cdot dx = 5x^4 dx$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної $f'(x)$ в цій точці, тобто $f'(x_0)$ на приріст аргументу Δx

(позначається dy або $df(x)$ — читається «де ігрек»).

Якщо MB — дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці M (з абсцисою x_0), то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\varphi$ (табл. 72) і з ΔAMB: $AB = AM \cdot \mathrm{tg}\varphi = f'(x_0)\,\Delta(x) = df(x_0)$, тобто **з геометричної точки зору** $df(x_0)$ є приростом ординати дотичної, що проведена до кривої $f(x)$ в точці x_0, якому відповідає приріст аргументу Δx

Основна властивість диференціала

Властивість	Обгрунтування
Диференціал функції є головна лінійна (тобто пропорційна Δx) частина приросту функції	За означенням $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ця рівність еквівалентна рівності $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$ $(\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0)$. Тоді $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x = dy + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x.$ (1) При $\Delta x \to 0$ добуток $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ прямує до нуля швидше, ніж Δx. Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ при досить малих Δx відносно менше від першого доданка в сумі (1) — диференціала dy функції $f(x)$. На рисунку $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = AC$. При $\Delta x \to 0$ відстань BC стає значно меншою, ніж відстань $AB = dy$, тому $AB \approx dy$ — головна частина $AC = \Delta f$

Застосування основної властивості диференціала для наближених обчислень значень функцій

Якщо в рівності (1) (див. вище) знехтувати другим доданком (досить малим для малих Δx), то дістанемо наближену рівність $\Delta y \approx dy$ або $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Тоді

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x} \quad (*)$$

для малих значень Δx

Приклад 1. Якщо у формулі (*) $x_0 = 0$ (коли існують $f(0)$ і $f'(0)$), то для малих Δx $f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0)\ \Delta x$. Позначимо $\Delta x = \alpha$. Тоді для малих α $f(\alpha) \approx f(0) + f'(0) \cdot \alpha$

Наприклад: а) для $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$; $f(0) = 0$; $f'(0) = \cos 0 = 1$, тобто $\sin\alpha \approx \alpha$ **(для малих α)**;

б) для $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$, тобто $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ **(для малих α)**

Приклад 2. Для наближеного обчислення $\sqrt[3]{1{,}012}$ візьмемо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}012$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

Тоді $f(x_0) = f(1) = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{3}$ і формула (*) дає

$\sqrt[3]{1{,}012} = f(1 + \Delta x) \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}012 = 1{,}004$,

тобто $\sqrt[3]{1{,}012} \approx 1{,}004$

Таблиця 76

ДРУГА ПОХІДНА І ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Поняття другої похідної

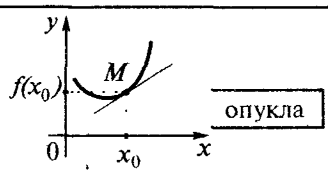
$$y = f(x)$$
$$y' = f'(x)$$
$$y'' = (f'(x))' = (y')'$$

Приклад. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$

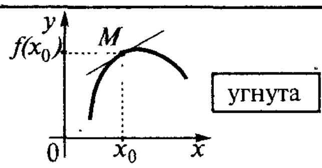
Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в усіх точках деякого проміжку. Ця похідна, в свою чергу, є функцією від x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають другою похідною від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'')

Поняття опуклості, угнутості і точок перегину графіка функції

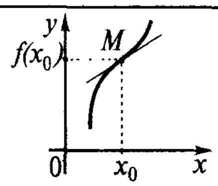
Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$, а в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка цієї функції в точці $M(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну (див. табл. 72)



Якщо в деякому околі точки M усі точки кривої графіка функції $y = f(x)$ (крім самої точки M) лежать вище від дотичної, то кажуть, що крива (і сама функція) в точці M є опуклою (точніше, строго опуклою). Також іноді кажуть, що в цьому випадку графік функції $y = f(x)$ напрямлений опуклістю вниз



Якщо в деякому околі точки M усі точки кривої (крім самої точки M) лежать нижче від дотичної, то кажуть, що крива (і сама функція) в точці M є угнутою (точніше, строго угнутою). Також іноді кажуть, що в цьому випадку графік функції напрямлений опуклістю вгору



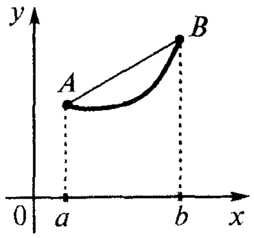
Якщо точка x_0 осі абсцис має ту властивість, що при переході аргументу x через неї крива $y = f(x)$ переходить з однієї сторони дотичної на другу, то точка x_0 називається точкою перегину функції $y = f(x)$, а точка кривої $M(x_0; f(x_0))$ — точкою перегину графіка функції $y = f(x)$

M — точка перегину графіка функції

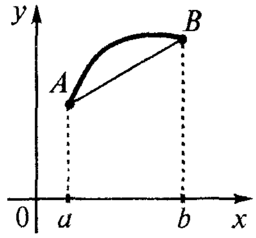
x_0 — точка перегину функції

У деякому околі точки x_0: при $\boldsymbol{x < x_0}$ крива **нижче** від дотичної, а при $\boldsymbol{x > x_0}$ крива **вище** від дотичної **(чи навпаки)**

Інший підхід до введення понять опуклості і угнутості графіка функції

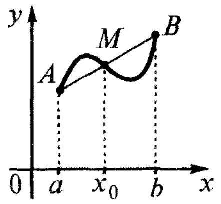


Опукла на відрізку $[a, b]$ ⇔ Дуга кривої на відрізку $[a; b]$ лежить нижче від хорди AB



Угнута на відрізку $[a; b]$ ⇔ Дуга кривої на відрізку $[a; b]$ лежить вище від хорди AB

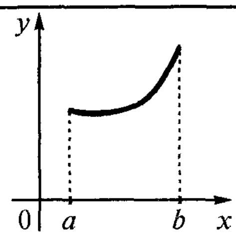
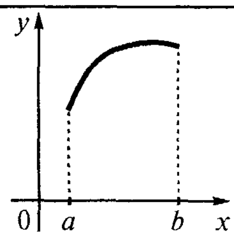
Якщо на відрізку $[a; b]$ графік функції $y = f(x)$ напрямлено опуклістю вниз, тобто функція опукла (відповідно вгору — функція угнута), то всередині відрізка $[a; b]$ цей графік знаходиться під (відповідно над) хордою AB, де $A(a;\ f(a))$, $B(b; f(b))$



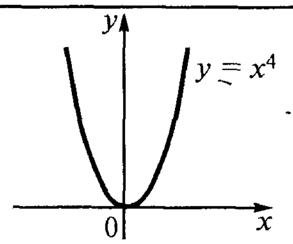
x_0 — точка перегину функції ⇔ Точка x_0 розділяє інтервали опуклості цієї функції

Якщо $x_0 \in [a;b]$ і на відрізку $[a; x_0]$ графік функції $y = f(x)$ напрямлено опуклістю вниз (відповідно вгору), а на відрізку $[x_0; b]$ — випуклістю вгору (відповідно вниз), то точка x_0 є точкою перегину функції, а точка $M(x_0; f(x_0))$ — точкою перегину графіка функції $y = f(x)$

Достатні умови опуклості і угнутості функції, що має першу і другу похідну при $x \in (a; b)$

Умова опуклості	Умова угнутості
Якщо в кожній точці інтервалу (a; b) $f''(x) > 0$, то на інтервалі (a; b) графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вниз (опуклий) 	***Якщо в кожній точці інтервалу (a; b) $f''(x) < 0$, то на інтервалі (a; b) графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вгору (угнутий)*** 

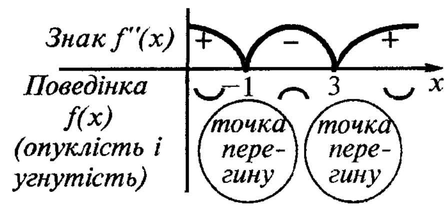
Зауваження. Ці умови є лише достатніми, але не є необхідними.
Наприклад, графік функції $y = x^4$ напрямлено опуклістю вниз на всій числовій прямій, хоч у точці $x = 0$ її друга похідна $y'' = 12x^2$ дорівнює нулю



Знаходження точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі

Необхідна умова	Достатня умова
У точках перегину функції $f(x)$ її друга похідна дорівнює нулю або не існує	***Якщо функція $f(x)$ має першу і другу похідну на інтервалі (a; b) і її друга похідна змінює знак при переході аргументу через точку $x_0 \in (a; b)$, то точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$***
x_0 — точка перегину функції $f(x)$ => $f''(x_0) = 0$ або $f''(x)$ не існує	У точці x_0 $f''(x)$ змінює знак => x_0 — точка перегину функції $f(x)$

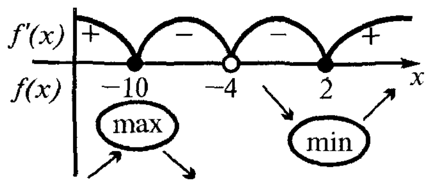
Дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість, угнутість і точки перегину

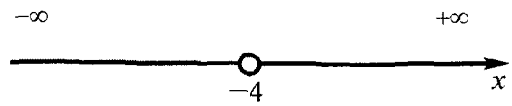
Схема	Приклад. $y = f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$
1. Знайти область визначення і інтервали, на яких функція неперервна	Область визначення: $x \in \boldsymbol{R}$ Функція неперервна в кожній точці своєї області визначення
2. Знайти другу похідну $f''(x)$	$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$ $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$
3. Знайти внутрішні точки області визначення, в яких $f''(x) = 0$ або не існує	$f''(x)$ існує на всій області визначення $f''(x) = 0$ при $x = -1$, $x = 3$
4. Позначити одержані точки на області визначення, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному інтервалі, на які розбивається область визначення	
5. Записати потрібний результат дослідження (інтервали опуклості і угнутості і точки перегину)	В інтервалі $(-\infty; -1)$ і в інтервалі $(3; +\infty)$ графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вниз ($f''(x) > 0$), а в інтервалі $(-1; 3)$ графік функції $f(x)$ напрямлено опуклістю вгору ($f''(x) < 0$). Точки перегину: $x = -1$ і $x = 3$ (в цих точках $f''(x)$ змінює знак)

Таблиця 77

СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ $y = f(x)$ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЕСКІЗУ ЇЇ ГРАФІКА

Схема	Приклад. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x + 4}$
1. Область визначення функції (див. табл. 25)	Область визначення: $x \neq -4$ $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$
2. Парність, непарність (табл. 26), періодичність (табл. 29)	Функція ні парна, ні непарна і не періодична
3. Точки перетину з осями координат (якщо можна знайти)	$\boxed{0y}$ $x = 0$; $y = 0$ $\boxed{0x}$ $y = 0$; $\dfrac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$; $x^2 - 5x = 0$; $x = 0$ або $x = 5$
4. Похідна і критичні точки (табл. 74)	$f'(x) = \dfrac{(2x - 5)(x + 4) - (x^2 - 5x)}{(x + 4)^2} = \dfrac{x^2 + 8x - 20}{(x + 4)^2}$ $f'(x) = 0$; $x^2 + 8x - 20 = 0$; $x_1 = -10$ або $x_2 = 2$

<table>
<tr>
<td>5. Проміжки зростання, спадання і точки екстремуму (і значення функції в цих точках) (табл. 74)</td>
<td>


$f(-10) = -25;\ f(2) = -1$
</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Поведінка функції на кінцях області визначення і асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні і похилі) (табл. 31)</td>
<td>


При $x \to -4$ зліва

$f(x) \to \left(\frac{26}{-0}\right) \to -\infty$

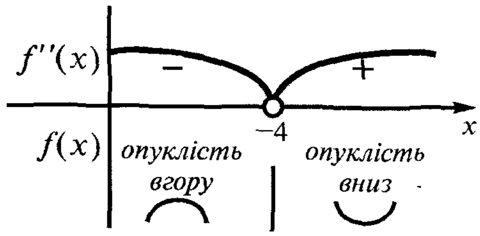
При $x \to -4$ справа

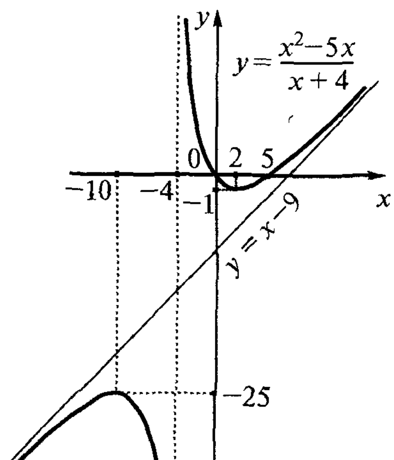
$f(x) \to \left(\frac{26}{+0}\right) \to +\infty$

Отже, $x = -4$ — **вертикальна асимптота**

Оскільки $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4} = \frac{x(x + 4) - 9(x + 4) + 36}{x + 4} = x - 9 + \frac{36}{x + 4}$, то при $x \to \infty$ $\frac{36}{x + 4} \to 0$, тоді $f(x) \to x - 9$, тобто $y = x - 9$ — **похила асимптота**
</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Друга похідна і дослідження функції на опуклість і угнутість. (табл. 76)
Знайти точки перегину (якщо вони існують) і значення $f(x)$ в точках перегину (цей етап не входить до мінімальної схеми дослідження функції)</td>
<td>
$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(2x + 8)(x + 4)^2 - 2(x + 4)(x^2 + 8x - 20)}{(x + 4)^4} = \frac{72}{(x + 4)^3}$.

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідної може змінюватися лише в точці $x = -4$



</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Якщо необхідно, знайти контрольні точки, що уточнюють поведінку графіка</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>−6</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>−33</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>9. На основі проведеного дослідження будуємо ескіз графіка функції $y = f(x)$</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

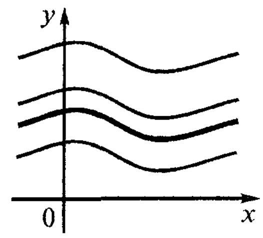
Таблиця 78

ПЕРВІСНА Й ІНТЕГРАЛ

Первісна

Означення	Приклади
Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$	1. Для функції $f(x) = x^2$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є $F(x) = \frac{x^3}{3}$, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ 2. Для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на інтервалі $(0; +\infty)$ первісною є $F(x) = \ln x$, оскільки $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Основна властивість первісних

Властивість	Геометричний зміст
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала	*Графіки будь-яких первісних даної функції одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі* $0y$ 

Невизначений інтеграл

Означення	Правила інтегрування
Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)\,dx$, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а C — деяка стала	$\int c \cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, де c — стала
	$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
	$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0 \cdot dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\,x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\,x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$

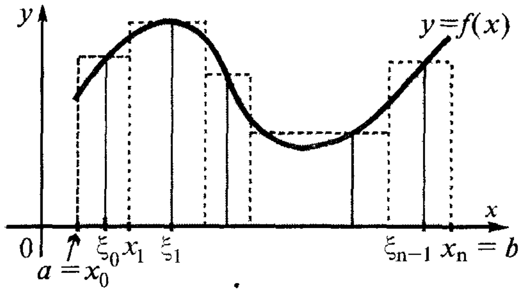
Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x $\begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{1 + x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$ або $-\operatorname{arcctg} x + C$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x + C$ або $-\arccos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

Таблиця 79

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Побудова інтегральної суми на прикладі визначення площі криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ задано невід'ємну і неперервну функцію $f(x)$ (див. графік)



Щоб визначити площу криволінійної трапеції (обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю $0x$, прямими $x = a$ і $x = b$), розбиваємо відрізок $[a;\ b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ (*)
на n частин, вибираємо на кожному з одержаних часткових відрізків $[x_k,\ x_{k+1}]$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$ довільну точку ξ_k, обчислюємо значення $f(\xi_k)$ функції $f(x)$ в цих точках і складаємо суму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,, \text{ де } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k\,. \qquad (**)$$

Ця сума дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників і називається інтегральною сумою.
Якщо тепер число точок розбиття необмежено збільшується і довжина максимального (найбільшого) часткового відрізка розбиття прямує до нуля, і при цьому величина S_n прямує до певної границі S, що не залежить від способу розбиття (*) і вибору точок ξ_k на часткових відрізках, то величину S називають площею криволінійної трапеції, тобто $S = \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k$

Означення визначеного інтеграла

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;\ b]$ і $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ називається число, що дорівнює границі інтегральної суми (**), тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,,$$

де $x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$ і
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$
$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Формула Ньютона — Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і $F(x)$ — будь-яка її первісна (тобто $F'(x) = f(x)$), то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Приклад. Оскільки для $f(x) = x^3$ одна з первісних $F(x) = \frac{x^4}{4}$, то

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Основні властивості визначеного інтеграла

$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$	$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$
$\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де $k = \text{const}$		Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;\ b]$ і $c \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

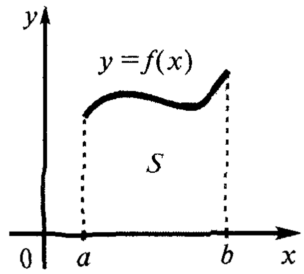
Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначеного інтеграла

Площа криволінійної трапеції

Формула

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної додатної на відрізку $[a;\ b]$ функції $f(x)$, віссю $0x$ і *прямими* $x = a$ *и* $x = b$, дорівнює

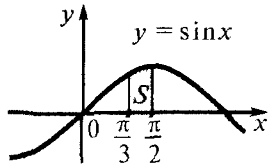
$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\,dx}$$



Приклад

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x;\ y = 0;\ x = \frac{\pi}{3};\ x = \frac{\pi}{2}$

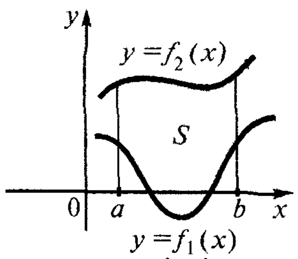
Зображуючи ці лінії, одержуємо криволінійну трапецію



$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Площа фігури, обмеженої графіками двох функцій і прямими $x = a$ і $x = b$

Формула



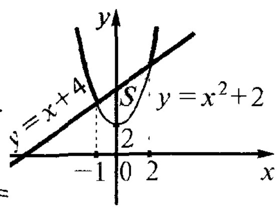
Якщо на заданому відрізку $[a;\ b]$ неперервні функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ мають ту властивість, що $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$, то

$$\boxed{S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx} \qquad (1)$$

Приклад

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2,\ y = x + 4$

Зобразимо задані лінії і абсциси їх точок перетину.



Абсциси точок перетину:

$x^2 + 2 = x + 4,$

$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

Тоді за формулою (1)

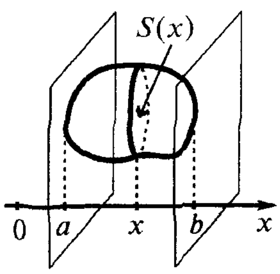
$$S = \int\limits_{-1}^{2} ((x + 4) - (x^2 + 2))\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}$$

Об'єми тіл

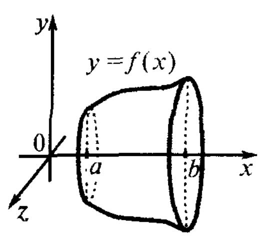
У загальному випадку

Якщо тіло вміщено між двома перпендикулярними до осі $0x$ площинами, що проходять через точки $x = a$ і $x = b$, то $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$, де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, що проходить через точку $x \in [a;\ b]$ і перпендикулярна до осі $0x$



Для тіла обертання

Якщо тіло одержано в результаті обертання навколо осі $0x$ криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ і прямими $x = a$ і $x = b$, то $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$



Таблиця 80

КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика — розділ математики про вибір і розміщення елементів деякої множини на основі якихось умов.
Вибрані (або вибрані і розміщені) групи елементів називають **сполуками**

Перестановки

Означення. **Перестановками** з n елементів називаються різні скінченні упорядковані множини (тобто такі множини, для яких указано порядок розміщення їх елементів), що їх можна дістати з деякої множини, яка містить n елементів (якщо всі елементи заданої множини різні — дістаємо перестановки без повторень, а якщо в заданій множині елементи можуть повторюватися, то дістаємо перестановки з повтореннями)

Формули для числа перестановок (P_n)

Без повторень	**З повтореннями**
$\boxed{(P_n) = n!}$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читається «ен факторіал») Для $n = 0$ $0! = 1$ (за означенням)	$\boxed{\tilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$
Приклад. Кількість різних шестизначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$	**Приклад.** Кількість різних шестизначних чисел, які можна скласти з трьох двійок, двох сімок і однієї п'ятірки, $\tilde{P}_6 = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$ (враховано, що $3 + 2 + 1 = 6$)

Розміщення

Означення. **Розміщенням** з n елементів по k називається будь-яка упорядкована множина з k елементів, складена з елементів n-елементної множини (якщо вибрані елементи не повторюються, то одержуємо розміщення без повторень, а якщо повторюються, то з повтореннями)

Формули для числа розміщень (A_n^k)

Без повторень	**З повтореннями**
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$
Приклад. Кількість різних тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не можуть повторюватися, $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$	**Приклад.** Кількість різних тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі можуть повторюватися, $\tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Комбінації (сполучення)

Без повторень	**З повтореннями**
Означення. Комбінацією (сполученням) без повторень з n елементів по k називається будь-яка k-елементна підмножина n-елементної множини	**Означення.** Нехай є n елементів (не обов'язково різних) даної множини. **Комбінаціями (сполученнями) з n елементів по k** називаються набори цих елементів, до кожного з яких входить k елементів і які відрізняються лише складом елементів (хоч би одним елементом)

Формули для числа комбінацій (сполучень) (C_n^k)

Без повторень	З повтореннями
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Приклад. Із класу, що складається з 25 учнів, можна виділити 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто $C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!\,(25-5)!} = \dfrac{25!}{5!\cdot 20!} = \dfrac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 53130$ способами	**Приклад.** Якщо у продажу є квіти чотирьох сортів, то різних букетів, що складаються з 7 квіток, можна скласти $\tilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!\,(10-7)!} = \dfrac{10!}{7!\cdot 3!} = \dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

Деякі властивості числа комбінацій (сполучень) без повторень

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$

   (зокрема, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)

2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Біном Ньютона (див. також табл. 13)

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Оскільки $1 = C_n^0 = C_n^n$ і $b^0 = 1$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$,
то формулу бінома Ньютона можна записати ще й так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n a^0 b^n.$$

Загальний член цього розкладу має вигляд $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$, де $k = 0, 1, \ldots, n$

Коефіцієнти C_n^k називають **біноміальними коефіцієнтами**

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Число біноміальних коефіцієнтів (а отже, і число доданків у розкладі степеня бінома) дорівнює $n+1$.
2. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою (оскільки $C_n^m = C_n^{n-m}$).
3. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.
4. Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.
5. Для обчислення біноміальних коефіцієнтів можна скористатися трикутником Паскаля (див. табл. 13), в якому обчислення коефіцієнтів ґрунтується на формулі $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Натуральний степінь різниці двох величин

Якщо у формулі бінома Ньютона замінити b на $-b$, то одержимо

$$\boxed{(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^n b^n}$$

Наприклад, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Таблиця 81

СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

Вибір правила

Правило суми	**Правило добутку**
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A **або** B можна вибрати $(m + n)$ способами	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то A **і** B можна вибрати $(m\ \ n)$ способами

Вибір формули

Перестановки		Розміщення		Комбінації (сполучення)	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ \ldots \ k_m!}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Таблиця 82

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Означення. Комплексними числами називаються числа вигляду $a + bi$, де a і b — дійсні числа ($a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$), i — деяке (не дійсне) число, квадрат якого дорівнює –1: $i^2 = -1$

$\boldsymbol{z = a + bi}$ — комплексне число (в алгебраїчній формі)
a — дійсна частина комплексного числа (також позначають $\boldsymbol{a = Re}\, z$)
bi — уявна частина комплексного числа
b — коефіцієнт біля уявної частини (також позначають $\boldsymbol{b = Im}\, z$)
i — уявна одиниця

Комплексне число $a + 0i$ ототожнюють з дійсним числом a
$\boldsymbol{a = a + 0i}$ $\quad a \in \boldsymbol{R}$, зокрема $0 = 0 + 0i$

Числа $\boldsymbol{z = a + bi}$ и $\bar{z} = \boldsymbol{a - bi}$ називають **спряженими** комплексними числами

Рівність комплексних чисел

$$\boxed{a + bi = c + di} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}}$$

Два комплексних числа називаються рівними, якщо рівні їх дійсні частини і коефіцієнти біля уявних частин

Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не вводяться

Дії над комплексними числами (в алгебраїчній формі)

Практичний орієнтир	Приклад	Означення
Арифметичні дії (додавання, віднімання, множення і ділення) над комплексними числами виконуються як дії над звичайними буквеними виразами (одночленами і двочленами), але з урахуванням того, що $i^2 = -1$	**Додавання**	
	$(2 + 7i) + (5 - 3i) =$ $= 2 + 5 + 7i - 3i = 7 + 4i$	$(a + bi) + (c + di) =$ $= (a + c) + (b + d)i$
	Віднімання	
	$(7 + 4i) - (5 - 3i) =$ $= 7 - 5 + 4i + 3i = 2 + 7i$ (Причому $(2 + 7i) + (5 - 3i) = 7 + 4i$)	Різницею двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ називається таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке в сумі с z_2 дає z_1. (З означення випливає, що $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$)
	Множення	
	$(2 + 3i) \cdot (7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12\, i^2 =$ $=$ (заміняєм i^2 на –1) $= 2 + 29i$	$(a + bi)(c + di) =$ $= (ac - bd) + (ad + bc)i$
	Ділення	
(Виконуючи ділення комплексних чисел, зручно спочатку домножити чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику)	$\frac{2 + 29i}{2 + 3i} = \frac{(2 + 29i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} =$ $= \frac{4 - 6i + 58i - 87i^2}{4 - 9i^2} = \frac{4 + 52i + 87}{4 + 9} =$ $= \frac{91 + 52i}{13} = 7 + 4i$ (Причому $(7 + 4i)(2 + 3i) =$ $= 2 + 29i$ — див. вище)	Часткою від ділення двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$) називається таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1. (З означення випливає, що $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$)

Знаходження степенів числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$	. . .	. . .	. . .
. . .			
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Властивості спряжених чисел

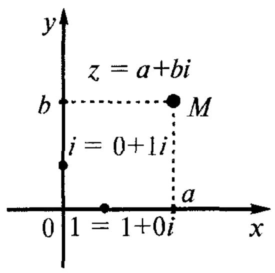
$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$

$$\boxed{\begin{aligned} &z + \bar{z} = 2a \in \boldsymbol{R} \\ &z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R} \end{aligned}}$$

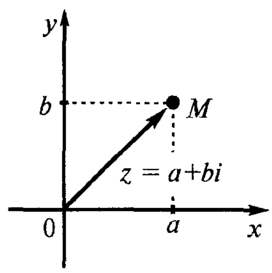
Сума і добуток двох взаємно спряжених комплексних чисел є число дійсне

Геометричне зображення комплексних чисел

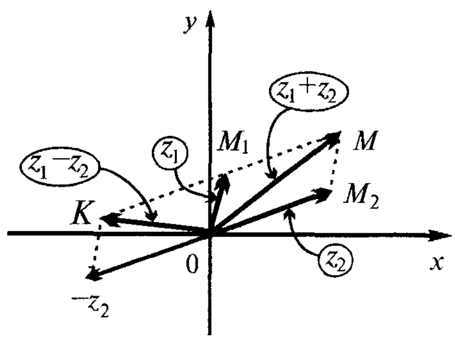
У вигляді точок координатної площини



У вигляді векторів на координатній площині



Зображення суми і різниці комплексних чисел



$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$

$z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \leftrightarrow \overline{OM}$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i \leftrightarrow \overline{OK}$

Геометричне зображення комплексних чисел встановлює взаємно-однозначну відповідність

між комплексними числами і точками площини (що називається комплексною площиною)

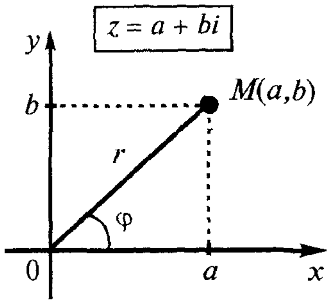
$$\boxed{z = a + bi \leftrightarrow M\,(a;\, b)}$$

між комплексними числами і радіусами-векторами (векторами, прикладеними на початку координат)

$$\boxed{z = a + bi \leftrightarrow OM},$$

де $M\,(a;\, b)$, $O\,(0;\, 0)$

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



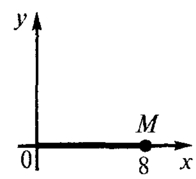
Положення точки M (вектора $\overline{OM}$) можна однозначно зафіксувати, задаючи довжину відрізка $OM = r$ і величину кута φ, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі $0x$. У цьому випадку $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Тоді $\boxed{a = r\cos\varphi}\ \boxed{b = r\sin\varphi}$ і

$z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\, i$, тобто

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad \text{де } r = \sqrt{a^2+b^2};\quad \cos\varphi = \frac{a}{r};\quad \sin\varphi = \frac{b}{r}}$$

— **тригонометрична форма комплексного числа**

Терміни і позначення	Приклади
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — **модуль** (або абсолютна величина) комплексного числа $z = a + bi$ $\boxed{\lvert z \rvert = r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ φ — **аргумент** комплексного числа z $\boxed{\text{Arg}z = \varphi}$ — визначається з точністю до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ **для числа 0 аргумент не визначено**	1. Зобразимо комплексне число $8 = 8 + 0i$ на комплексній площині. З рисунка видно, що $\lvert 8 \rvert = OM = 8$, $\text{Arg}8 = 0$, тобто в тригонометричній формі $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$  2. $z = 1 - i$. Тут $a = 1$, $b = -1$. Тоді $\lvert z \rvert = \lvert 1 - i \rvert = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\ \text{Arg}z = \varphi = \frac{7\pi}{4}$, тобто в тригонометричній формі $1 - i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Рівність комплексних чисел у тригонометричній формі

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow$ $r_1 = r_2$; $\varphi_1 = \varphi_2$ (або відрізняються на $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$)

Два комплексних числа, заданих у тригонометричній формі, рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на величину, кратну 2π

Таблиця 84

ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ У ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

Множення	Ділення
$z_1 \ z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$ ***При множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються***	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$ ***При діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються (модуль діленого ділиться на модуль дільника і від аргументу діленого віднімається аргумент дільника)***

Піднесення до степеня

$$z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in N}$$

При піднесенні комплексного числа до натурального степеня модуль підноситься до цього степеня, а аргумент множиться на показник степеня. (Формулу можна використовувати і для цілих від'ємних n)

Приклад

$$(1 - i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$$

$$= (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$$

$$= 2^{10} (\cos 35\pi + i \sin 35\pi) = 1024(-1 + i\ 0) = -1024$$

Добування кореня n-го степеня

$$z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \ k \in Z}$$

(Всього одержуємо n різних значень при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$)

При добуванні кореня n-го степеня з комплексного числа з модуля добувається арифметичний корінь n-го степеня, а до аргументу додається $2\pi k$ і результат ділиться на показник кореня

У множині комплексних чисел знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ..., $\sqrt[2k]{\ }$ не є знаками лише арифметичних коренів, як це було у множині дійсних чисел (див. табл. 29). Тому знаком $\sqrt[n]{z}$ позначаються усі n значень кореня для будь-якого n (парного чи непарного)

Приклади

1. $\sqrt{-1} = \pm i$

2. $\sqrt{9} = \pm 3$ (лише у множині комплексних чисел!)

3. $u = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin\frac{0 + 2\pi k}{3}\right) =$

(арифметичний корінь!)

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k \in Z$$

Маємо три різних значення $\sqrt[3]{8}$:

1) при $k = 0$ $u_0 = \sqrt[3]{8} = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$;

2) при $k = 1$ $u_1 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$;

3) при $k = 2$ $u_2 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{4\pi k}{3} + i \sin\frac{4\pi k}{3}\right) =$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}, \text{ тобто } \sqrt[3]{8} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{array}\right.$$