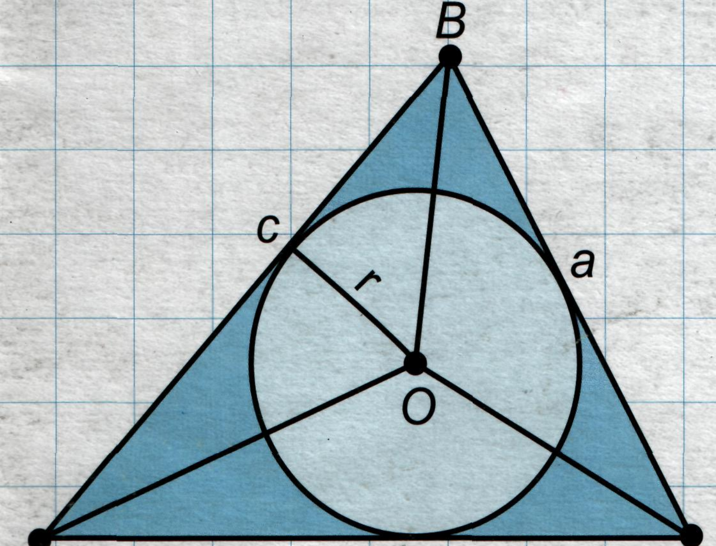
ГЕОМЕТРІЯ У ТАБЛИЦЯХ

за новою програмою

7-9 класи



Роєва Т.Г.
Синельник Л.Я.
Кононенко С.А.

Країна мрій

Г.Роєва, Л.Я.Синельник, С.А.Кононенко

ГЕОМЕТРІЯ У ТАБЛИЦЯХ 7-9 класи

Навчальний посібник

Узгоджено з програмою
Міністерства освіти і науки України

Харків
2003

УДК 373.167.1: 51+51 (075.3)
ББК 22.1 я 721
Р 61

Роєва Т. Г., Синельник Л. Я., Кононенко С. А. Геометрія у таблицях. 7 – 9 класи: Навч. посібник. – 2-ге вид., випр. і допов. — Х.: Країна мрій™, 2002. – 128 с.

Посібник містить основні теоретичні питання курсу геометрії 7 – 9 класів. Розглянуті розв'язання основних задач кожної теми. Підібрані тренувальні вправи, самостійні і контрольні роботи по всіх розділах у відповідності до програми. Всі вправи і задачі розбиті на три рівні складності. До більшості задач подані відповіді.
Книга призначена для учнів 7 – 9 класів, вчителів загальноосвітніх шкіл, абітурієнтів.

Навчальне видання

III вікова група

Роєва Тетяна Григорівна

Синельник Лідія Яковлівна

Кононенко Світлана Андріївна

Геометрія у таблицях

7 – 9 класи

Редактор Томашевська Н. В.
Комп'ютерна верстка Терлецький О.В., Цовма І.М.
Коректор Ольховська М. А.

Підписано до друку 20.07.2002 р.. Формат 60x90/8.
Папір офсет. Друк офсет.

Видавець Халімон Є.В.
Реєстр. свід. №961 від 19.06.2002р.
61146, м. Харків, а/с 2656, тел. 58-50-70

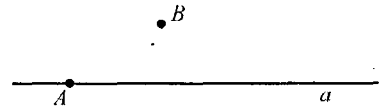
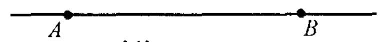
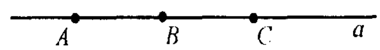
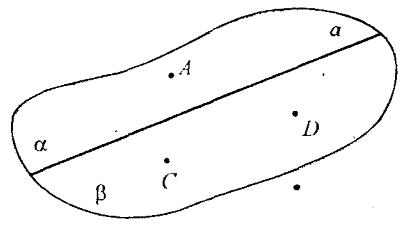
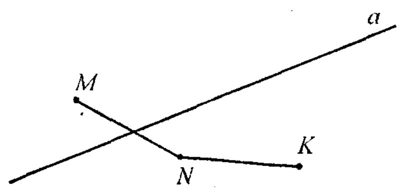
ISBN 966-8220-25-0

7 клас

- Найпростіші геометричні фігури та їх властивості
- Трикутники
- Геометричні побудови

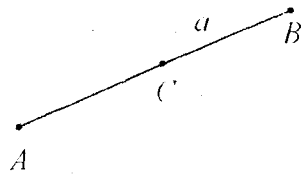
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НАЙПРОСТІШИХ ФІГУР

Аксіоми планіметрії	
Основними фігурами планіметрії є <u>точка</u> і <u>пряма</u>	
Аксіоми належності точок і прямих на площині	
1. Якою б не була пряма, існують точки, які належать їй та які їй не належать. 2. Через дві точки можна провести пряму, і тільки одну.	 $A \in a$; $B \notin a$;  AB — єдина
Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і на площині	
1. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.	 Точка B лежить між точками A і C.
2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.	 $A \in \alpha; C \in \beta; D \in \beta$
3. Відрізок MN перетинає пряму A, якщо точки M та N лежать в різних півплощинах відносно прямої a.	 $MN \cap a$; $KN \not\cap A$

Аксіоми вимірювання відрізків і кутів

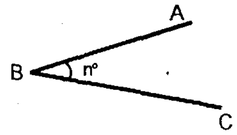
1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які розбивається відрізок будь-якою своєю точкою.



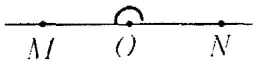
$AB = a; a > 0.$

$AB = AC + CB.$

2. Кожний кут має певну градусну міру більше нуля. Розгорнутий кут дорівнює $180°$. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.



$\angle ABC = n°; n° > 0.$

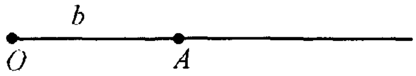


$\angle MON = 180°$

$\angle MON$ — розгорнутий

Аксіоми відкладання відрізків і кутів

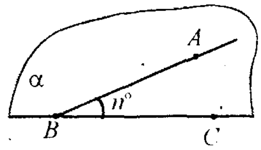
1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.



$OA = b$;

відрізок OA — єдиний

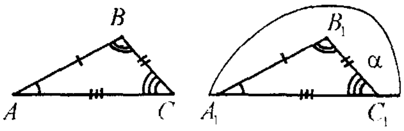
2. Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою $180°$, і тільки один.



$\angle ABC = n°; 0° < n° < 180°;$

$\angle ABC$ — єдиний

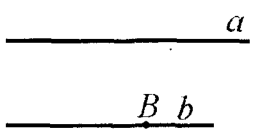
3. Яким би не був трикутник, існує рівний йому трикутник в заданому розташуванні відносно даної півпрямої.



$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$

Аксіома паралельних прямих

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести на площині пряму, паралельну даній, і тільки одну.



$B \notin a, B \in b; \quad b \parallel a;$

b — єдина

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

Накреслити дві прямі, що перетинаються, і вибрати на одній з них відрізок, що не має спільних точок з іншою прямою. Вказати точку, яка належить одночасно обом прямим.

1. Накреслити дві прямі, що перетинаються, і вибрати на одній з них відрізок, що має спільну точку з іншою прямою. Вказати точку, яка лежить на одній з цих прямих, але не належить вибраному відрізку.
2. Чи перетинаються відрізки AB та CD, CD та CE? (Рис. 1).
3. Чи перетинаються прямі AB та CD? (Рис. 1).
4. Позначити точку M так, щоб вона лежала на прямій CD, але не лежала ні на відрізку AB, ні на відрізку CD. (Рис. 1).
5. Позначити точку N, яка лежить на прямій CD між точками A та B. (Рис. 1).
6. Чи існують точки, які належать одночасно відрізкам AB та CD? (Рис. 1).

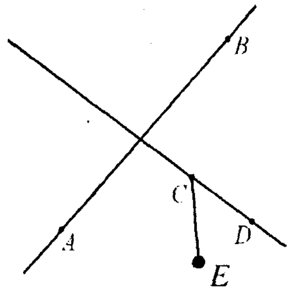


Рис. 1

7. На прямій m лежать точки M, N і K, причому $MN = 85$ *мм*, $NK = 1,15$ *дм*. Якою може бути довжина відрізка MK у сантиметрах?
8. На відрізку MN, який дорівнює 8 *дм*, лежать точки A і B по різні сторони від середини C відрізка MN. $CA = 7$ *см*, $CB = 0,24$ *м*. Знайти довжини відрізків AN і BN у дециметрах.
9. На прямій відкладені два відрізки AC та CB. На відрізку CB дана точка D така, що $5CD = 4DB$. Знайти довжину відрізка, кінцями якого є середини відрізків AC і DB, якщо $CD = 12$ *см*.
10. Довжина відрізка $AB = 14$ *см*. Знайти на прямій AB всі такі точки D, для яких $DA = 3DB$.
11. На рис.2 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на рисунку рівні кути?

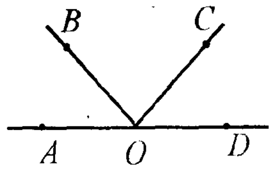


Рис. 2

12. Даний $\angle AOB = 100°$, промінь OF поділяє цей кут на два кути:

а) знайти $\angle BOF$ і $\angle AOF$, якщо $\angle BOF = 3\angle AOF$;

б) знайти $\angle AOF$, якщо промінь OF проведений так, що OF — бісектриса $\angle AOB$. Гострим чи тупим є цей кут?

13. Прямий кут поділений променем, що виходить з його вершини, на два такі кути, що половина одного кута дорівнює третині другого. Знайти ці кути.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-1-1

<table>
<tr><th>В – I</th><th colspan="2">7 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Позначити на аркуші паперу дві точки B і P:
а) провести через точки B і P пряму;
б) позначити на прямій BP дві точки, що належать відрізку BP.</td><td colspan="2">1. Дані дві точки M і K:
а) провести через точки M і K пряму. Скільки таких прямих можна провести?
б) позначити на прямій MK дві точки, які не належать відрізку MK.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Точки A, B, C лежать на одній прямій. $AB = 30$ см, $BC = 5$ см. Якою може бути довжина відрізка AC?</td><td colspan="2">2. Точки K, L, M лежать на одній прямій. $KL = 2$ см, $LM = 3$ см. Якою може бути довжина відрізка KM?</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>9 балів</th><th>В – IV</th><th>12 балів</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Дані пряма c і три точки K, M, P, які не лежать на цій прямій, такі, що відрізок KP не перетинає пряму c, а відрізок MP її перетинає. Чи перетинає цю пряму відрізок KM?</td><td colspan="2">1. Дані пряма a і точки A, B, C, що не належать цій прямій:
а) чи перетинає пряму a відрізок BC, якщо відрізки AC, AD і BD її не перетинають?
б) чи можуть кожний з відрізків AC, AB і BC перетинати пряму a?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Промінь p проходить між променями a та b. $\angle(ab) = 90°$, $\angle(ap) = 32°$. Знайти $\angle(pb)$.</td><td colspan="2">2. Промінь k проходить між променями p та a. $\angle(pk) = 70°$, $\angle(ka) = 15°$. Знайти $\angle(pa)$.</td></tr>
</table>

САМОСТІЙНА РОБОТА С-1-2

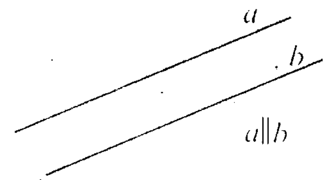
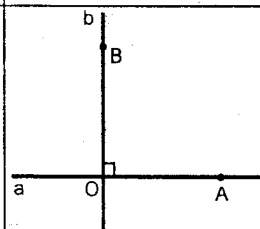
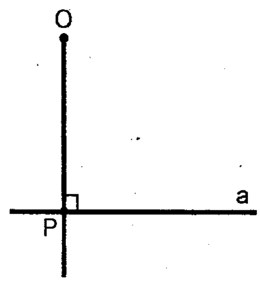
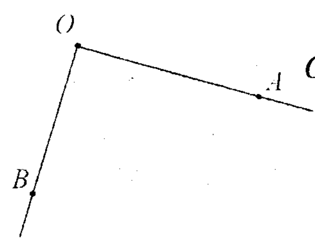
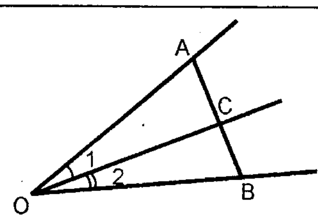
<table>
<tr><th>В – I</th><th colspan="2">7 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">Трикутники ABC і MNK рівні. Сторони ΔABC відомі: $AB = 3$ см, $BC = 6$ см, $AC = 4$ см. Знайти сторони ΔMNK.</td><td colspan="2">Трикутники ABC і KMN рівні. Знайти кути ΔKMN, якщо кути ΔABC дорівнюють: $\angle A = 15°$; $\angle B = 70°$; $\angle C = 95°$.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th colspan="2">12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">Сума довжин всіх сторін одного трикутника дорівнює 75 см, а сума довжин всіх сторін другого трикутника дорівнює 74 м. Чи можуть ці трикутники бути рівними? Відповідь пояснити.</td><td colspan="2">У ΔABC відомі сторони: $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см. Чи може ΔABC бути рівним іншому трикутнику, у якого сума довжин двох сторін дорівнює 12 см? Чому?</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-1
Тема. Основні властивості найпростіших геометричних фігур

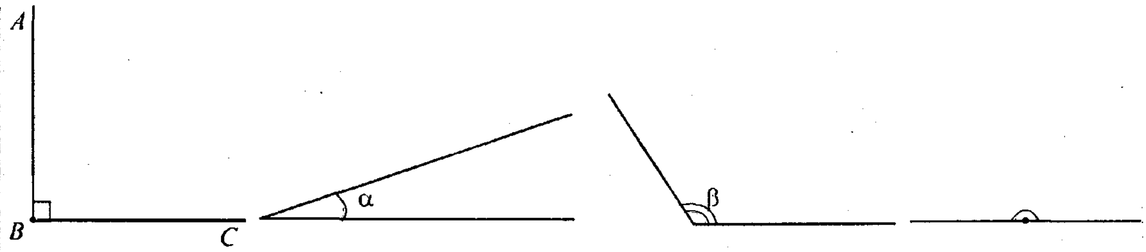
В – I	7 балів	В – II
1. Дані дві точки A і B: а) провести пряму, що проходить через точки A і B. Скільки таких прямих можна провести? б) позначити на прямій дві точки, що відрізняються від A і B. Чи належать вони відрізку AB?		1. Дані три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій: а) провести прямі, що проходять через кожні дві з цих точок. Скільки таких прямих можна провести? б) скільки різних відрізків задають три дані точки? в) чи існує точка, що належить кожній з проведених прямих? Пояснити відповідь.
2. Точки A, B, C різні і лежать на одній прямій. $AB = 2$, $BC = 4$. Розглянути всі можливі варіанти взаємного розміщення точок A, B, C і знайти відношення $AB : BC$.		2. Точки C, D, E різні і лежать на одній прямій. $CD = 1$, $DE = 3$. Скільки існує варіантів взаємного розміщення точок C, D, E? Знайти відношення $CD : CE$.
В – III	**9 балів**	**В – IV**
1. На відрізку AB позначена точка C. Відрізок AC на 7 *см* менше відрізка AB, якщо відрізок $AB = 17$ *см*.		1. На відрізку CD довжиною 22 *см* узята точка M. Знайти довжину відрізка CM, якщо довжина відрізка MD на 12 *см* менше довжини відрізка CD.
2. Дані пряма c і точки A, C і M, які не лежать на ній. Чи перетинає пряму c відрізок AM, якщо відрізки AC і CM перетинають цю пряму? Відповідь пояснити.		2. Дані пряма b і три точки B, C і M, що не лежать на ній. Чи перетинає пряму b відрізок CM, якщо відрізки BC і BM не перетинаються з прямою? Відповідь пояснити.
3. Трикутники ABC і KPM рівні. Відомо, що сторони ΔKPM: $KP = 2$ *см*, $PM = 4$ *см*, $KM = 5$ *см*. Знайти сторони ΔABC.		3. Трикутники ABC і KLM рівні. Відомо, що $\angle A = 20°$, $\angle L = 40°$, $\angle M = 120°$. Знайти решту кутів цих трикутників.
В – V	**12 балів**	**В – VI**
1. Точка N – точка відрізка MK. Знайти довжину відрізка MK, якщо довжина відрізка MN у два рази менше довжини відрізка NK, що дорівнює 11,3 *см*.		1. Точка D – точка відрізка XY. Знайти довжину відрізка DY, якщо довжина відрізка DY у 3 рази менше довжини відрізка DX, а довжина відрізка XY дорівнює 48 *см*.
2. Пряма a перетинає відрізки AM і AN, але не перетинає відрізок AC. Як розміщені точки A, M, N і C відносно прямої a і чому?		2. Пряма b перетинає відрізок BC і не перетинає відрізки CD і BK. Як розміщені точки B, C, D і K відносно прямої b і чому?
3. ΔABC рівний $\Delta A_1B_1C_1$, а $\Delta A_1B_1C_1$ рівний $\Delta A_2B_2C_2$. Відомо, що сторона $A_1B_1 = 10$ *см*, $B_2C_2 = 5$ *см*, $A_2C_2 = 7$ *см*. Знайти сторони ΔABC.		3. ΔABC рівний ΔKMN, а ΔKMN рівний ΔXYZ. Сторона KM дорівнює 11 *см*, сторона YZ на 4 *см* більше сторони KM, а сторона XZ дорівнює 20 *см*. Знайти сторони ΔABC.

ТРИКУТНИКИ

§2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ. КУТИ

Означення	Приклади
Дві прямі на площині називаються <u>паралельними</u>, якщо вони не перетинаються.	
Дві прямі називають <u>перпендикулярними</u>, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну даній, і тільки одну.	 $a \perp b,\ \angle BOA = 90°$; $b \perp a, A \in b$ $A \in a$; b – єдина.
<u>Перпендикуляром</u> до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної даній, від заданої точки до точки перетину цих прямих. Відстань від точки до прямої — це <u>довжина перпендикуляра</u>, опущеного з цієї точки на пряму. <u>Перпендикуляр</u> — найменша відстань від даної точки до точок даної прямої.	 $OP \perp a$; OP — перпендикуляр до прямої a, точка P — основа перпендикуляра, OP — відстань від точки O до прямої a.
Кути	
<u>Кутом</u> називається фігура, утворена двома різними півпрямими, що виходять з однієї точки.	 $\angle AOB$. O — вершина кута, OA та OB — сторони кута.
<u>Бісектрисою</u> називається промінь, що проходить між сторонами кута і поділяє кут на два рівні кути.	 OC — бісектриса $\angle AOB$, $\angle AOC = \angle COB$, $\angle 1 = \angle 2$.

Види кутів

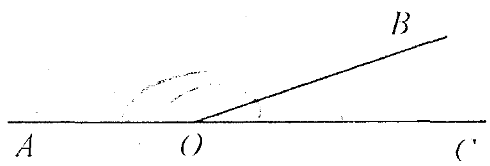


$\angle ABC = 90^{\circ}$ прямий	$\alpha < 90^{\circ}$ гострий	$\beta > 90^{\circ}$ тупий	$\angle AOB = 180^{\circ}$ розгорнутий

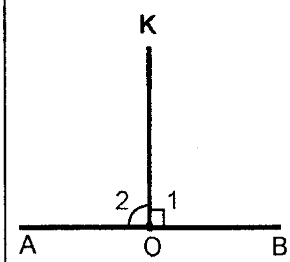
Суміжні і вертикальні кути

Суміжними кутами називаються кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними півпрямими.

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.
Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні.
Кут, суміжний з прямим кутом, є прямим кутом.



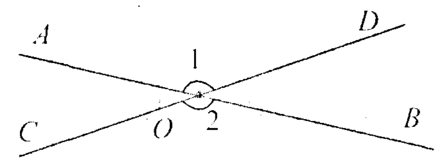
$\angle AOB$ и $\angle BOC$ — суміжні,
$\angle AOB + \angle BOC = 180^{\circ}$.



$\angle 1$ и $\angle 2$ — суміжні.
$\angle 1 = 90^{\circ}$, $\angle 2 = 90^{\circ}$.

Вертикальними називаються кути, у яких сторони є доповняльними півпрямими.

Вертикальні кути рівні.



$\angle AOC$ і $\angle DOB$ — вертикальні,
$\angle 1$ і $\angle 2$ — вертикальні,
$\angle AOC = \angle DOB$,
$\angle 1 = \angle 2$.

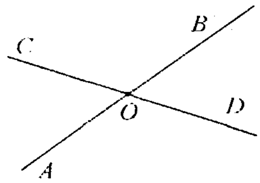
Примітка. Часто при доведенні теорем і розв'язанні задач в геометрії використовують метод від супротивного.

Алгоритм доведення методом від супротивного

1. Припущення, супротивне тому, що потрібно довести.
2. Висновок, що випливає із припущення.
3. Суперечність. (Суперечність може бути з умовою теореми або задачі, з аксіомами, з відомими властивостями.)
4. Висновок: припущення не правильне, а правильне те, що було потрібно довести.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

Задача 1. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює сумі суміжних з ним кутів. Чому дорівнюють кути?



Дано: $AB \cap CD$. $\angle COB = \angle COA + \angle BOD$.

Знайти: $\angle COA$; $\angle COB$; $\angle BOD$; $\angle DOA$.

Розв'язання.

При перетині прямих AB і CD утворилися чотири кути. $\angle COB$ має два суміжних кути $\angle COA$ і $\angle BOD$, які є вертикальними. Нехай $\angle COA = x^\circ$;тоді $\angle BOD = x^\circ$ (властивість вертикальних кутів), за умовою задачі, $\angle COB = 2x^\circ$. За властивістю суміжних кутів, $\angle COB + \angle BOD = 180^\circ$. Складемо рівняння: $2x + x = 180^\circ$, розв'яжемо його: $3x = 180$, $x = 60$. Отже $\angle COA = \angle BOD = 60^\circ$; $\angle COB = \angle DOA$, оскільки є вертикальними і $\angle COB = 2x = 120^\circ$.

Відповідь: $60^\circ; 120^\circ; 60^\circ; 120^\circ$.

Задача 2. Три точки A, B і C лежать на одній прямій. Відомо, що $AB = 3{,}7\ м$, $BC = 4{,}3\ м$, $AC = 8\ м$. Довести, що точка C не лежить між точками A і B.

Доведення.

Доведемо методом від супротивного.

1. Припустимо, що точка C лежить між точками A і B.

2. Із аксіоми виміру відрізків випливає, що $AC + MB = AB$, тобто $8\ м + 4{,}3\ м = 3{,}7\ м$.

3. Отримаємо неправильну рівність: $12{,}3 = 3{,}7$.

4. Висновок: припущення не правильне, а правильне те, що треба довести. Точка C не лежить між точками A і B.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти суміжні кути, якщо один із них:

а) на 22° більше іншого; в) у $3{,}5$ рази більше іншого;

б) на $71^\circ 30'$ менше іншого; г) у $2\frac{1}{3}$ рази менше іншого.

2. Знайти суміжні кути, якщо відомо, що їх градусні міри відносяться як:

а) $3:5$; б) $10:8$; в) $13:23$; г) $25:11$.

3. Два кути відносяться як $1:3$, а суміжні з ними кути як $4:3$. Знайти дані кути.

4. Один із суміжних кутів дорівнює 23°. Знайти величину кута, що доповнює його до прямого кута.

5. Різниця двох суміжних кутів дорівнює меншому з них. Знайти ці кути.

6. Знайти всі кути, якщо один із кутів, утворених при перетині двох прямих:

а) на 40° більше іншого;

б) на 17° менше іншого;

в) у 2 рази більше іншого;

г) у 5 разів менше іншого.

7. Знайти всі кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

а) сума двох із них дорівнює 102°; в) всі кути рівні між собою;

б) різниця двох із них дорівнює 46°; г) сума трьох із них дорівнює 204°.

8. Три прямі перетинаються в одній точці.

Знайти $\angle 1$, якщо $\angle 2 + \angle 3 = 142^\circ$ (див. рис.1).

9. Сума вертикальних кутів у 2 рази менше кута, суміжного з кожним з них. Знайти ці вертикальні кути.

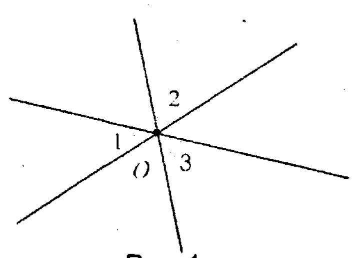


Рис. 1

10. Один із чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих, у 11 разів менше суми трьох інших кутів. Знайти ці чотири кути.

11. Відомо, що $AB = 4$ *дм*, $BC = 5$ *дм*, $AC = 3$ *дм*. Довести методом від супротивного, що точки A, B і C не лежать на одній прямій.

12. Відомо, що $\angle(ab) = 100^\circ$, $\angle(ac) = 110^\circ$. Довести методом від супротивного, що промінь C не проходить між сторонами $\angle(ab)$.

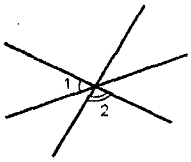
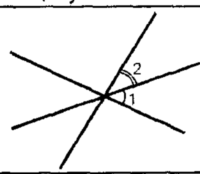
13. Довести, що якщо дані суміжні кути рівні, то вони прямі (використати метод від супротивного).

14. Довести, що якщо кути, суміжні з двома даними кутами, не рівні між собою, то дані кути теж не рівні (використати метод від супротивного).

15. Довести методом від супротивного, що якщо кут, суміжний з даним кутом, прямий, то даний кут теж прямий.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-2-1

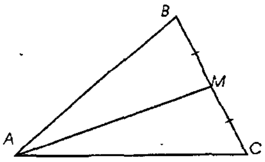
Тема. Властивості кутів, утворених при перетині прямих

<table>
<tr><th>В–І</th><th>7 балів</th><th>В–ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Суміжні кути відносяться як $2:4$. Знайти ці суміжні кути.</td><td>1. Один із суміжних кутів на 30° більше іншого. Знайти ці суміжні кути.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 27°. Знайти решту кутів.</td><td>2. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 120°. Знайти решту кутів.</td></tr>
<tr><th>В–ІІІ</th><th>12 балів</th><th>В–IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Один із суміжних кутів складає $\frac{1}{5}$ другого кута. Знайти ці суміжні кути.</td><td>1. Один із суміжних кутів складає $0,8$ іншого. Знайти ці суміжні кути.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 312°. Знайти ці кути.</td><td>2. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 86°. Знайти ці кути.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Дано:
$\angle 1 = 20^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$.
Знайти решту кутів.
</td><td>3. Дано:
$\angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$.
Знайти решту кутів.
</td></tr>
</table>

§3. ТРИКУТНИКИ

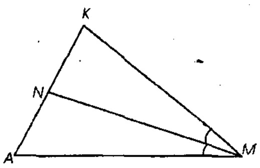
Означення елементів трикутника

<u>Медіаною</u> трикутника називається відрізок, що з'єднує вершину трикутника з серединою протилежної сторони.



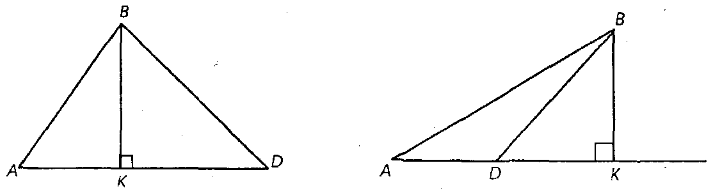
$BM = CM$, AM – медіана ΔABC.

<u>Бісектрисою</u> трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що з'єднує вершину трикутника з точкою протилежної сторони.



$\angle AMN = \angle KMN$, MN – бісектриса ΔAMK.

<u>Висотою</u> трикутника, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, опущений з цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

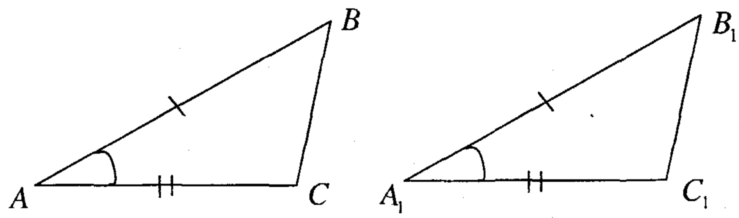


$BK \perp AD$, BK – висота ΔABD.

Трикутники називаються <u>рівними</u>, якщо рівні їх відповідні елементи: сторони, кути, медіани, бісектриси, висоти. Два трикутники можна порівняти за трьома елементами.

Перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами і куту між ними.

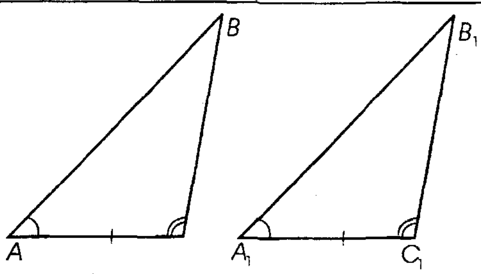
Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.



$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Друга ознака рівності трикутників – за стороною і прилеглим до неї кутам.

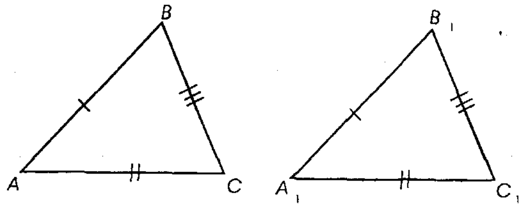
Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника рівні відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Третя ознака рівності трикутників – за трьома сторонами.

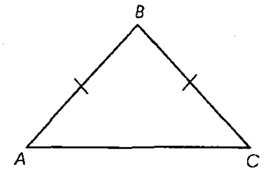
Якщо три сторони одного трикутника рівні відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Рівнобедрений трикутник

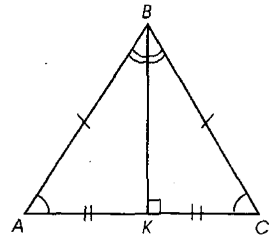
Рівнобедреним трикутником називається трикутник, у якого рівні дві сторони.



$AB = BC$ – бічні; AC – основа.

Властивості рівнобедреного трикутника

1. У рівнобедреного трикутника дві рівні сторони (бічні).
2. У рівнобедреного трикутника кути при основі рівні.
3. У рівнобедреного трикутника медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.



$AB = BC$, $\angle A = \angle C$,

$AK = KC$, BK – медіана, $BK \perp AC$, BK – висота,

$\angle ABK = \angle CBK$, BK – бісектриса.

Ознаки рівнобедреного трикутника

Трикутник є рівнобедреним, якщо в ньому співпадають:

а) висота і медіана;

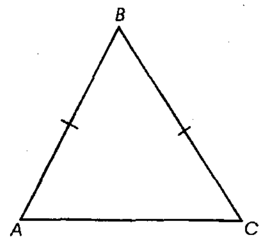
б) або висота і бісектриса;

в) або медіана і бісектриса.

Висновок: в рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, співпадають.

Рівносторонній трикутник

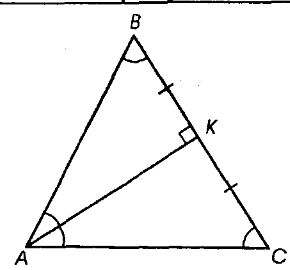
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається рівностороннім.



$AB = BC = AC$.

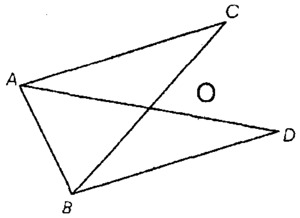
Властивості рівностороннього трикутника

1. У рівностороннього трикутника всі кути рівні.
2. Будь-яка медіана рівностороннього трикутника є бісектрисою і висотою.



AK – медіана, висота, бісектриса.

Задача 1. $\Delta ABC = \Delta BAD$. Їх сторони AD і BC перетинаються в точці O, яка є їх серединою. Довести, що $\Delta AOC = \Delta BOD$.



Дано: $\Delta ABC = \Delta BAD$. $AD \cap BC$ в точці O. $AO = DO$; $BO = CO$.
Довести: $\Delta AOC = \Delta BOD$.

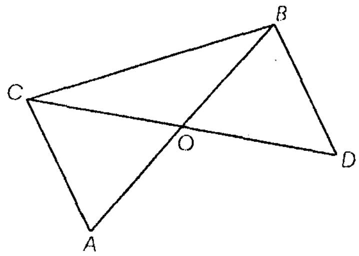
Доведення.

1-й спосіб. Оскільки $\Delta ABC = \Delta BAD$ (за умовою), то $\angle ACB = \angle BDA$ як відповідні елементи. $\Delta AOC = \Delta BOD$ як вертикальні кути.

$CO = BO$ за умовою (точка O – середина BC і AD; $BC = AD$), тоді $\Delta AOC = \Delta BOD$ за стороною і двома прилеглими до неї кутами (друга ознака рівності трикутників).

2-й спосіб. Із рівності $\Delta ABC = \Delta BAD$ випливає, що $AC = BD$ і $\angle C = \angle D$ як відповідні елементи. $CO = DO$, оскільки O – середина BC і AD; $BC = AD$, тоді $\Delta AOC = \Delta BOD$ за двома сторонами і кутом між ними (перша ознака рівності трикутників).

Задача 2. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є їх серединою. Відомо, що $\angle ACD = \angle BCD$. Довести, що ΔBCD – рівнобедрений.



Дано: $AB \cap CD$ в точці O.
$OC = OD$; $AO = BO$. $\angle ACD = \angle BCD$.
Довести: ΔBCD – рівнобедрений.

Доведення.

Розглянемо ΔCOA і ΔDOB. Ці трикутники рівні за двома сторонами і кутом між ними: $CO = DO$ за умовою, $AO = BO$ за умовою, $\angle COA = \angle DOB$ – вертикальні,
оскільки $\Delta COA = \Delta DOB$, то $\angle ACO = \angle BDO$ як відповідні елементи рівних трикутників, тоді $\angle BCD = \angle BDO$, оскільки $\angle BCD = \angle ACD$.
Розглянемо ΔCBD. Стороні CD прилеглі $\angle BCD = \angle BDC$, тоді ΔCBD – рівнобедрений з основою CD.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. На сторонах кута BAC відкладені рівні відрізки AM і AN. Довільну точку D бісектриси цього кута з'єднали з точками M і N. Довести, що $DM = DN$ (рис. 1).

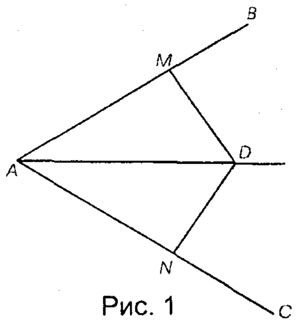


Рис. 1

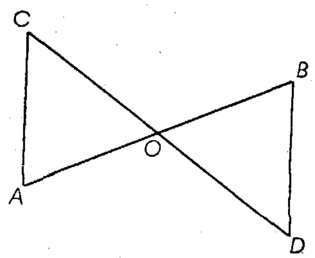
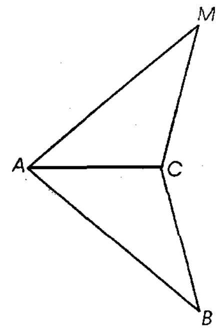
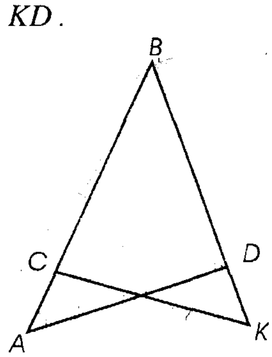
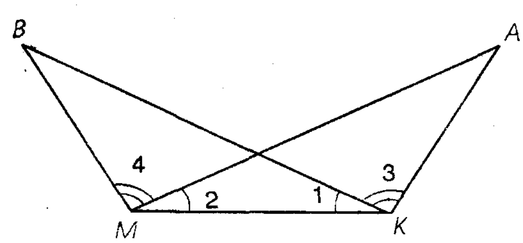
2. Довести, що в рівних трикутниках медіани, проведені до рівних сторін, рівні.
3. Периметр рівнобедреного трикутника $176\ см$, а його основа $66\ см$. Знайти бічну сторону трикутника.
4. У трикутнику ABC точка M – середина сторони AB. Від точки M на промені CM відкладений відрізок $MD = CM$. Знайти BC, якщо $AD = 7{,}2\ см$.
5. У трикутнику ABC сторони AB і BC рівні. На цих сторонах узяті точки D і K так, що $AD = CK$. Довести, що трикутники AKB і CDB рівні.
6. Довести, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.
7. Довести, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо основа і прилеглий до неї кут одного трикутника дорівнює основі і прилеглому до неї куту другого трикутника.
8. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як $5:6$. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр $64\ см$.
9. Дан рівносторонній трикутник ABC. На його сторонах AB, BC і CA відкладені відповідно рівні відрізки AA_1, BB_1 і CC_1. Довести, що $\Delta A_1B_1C_1$ – рівносторонній.
10. Трикутник, периметр якого $15\ см$, поділяється медіаною на два трикутники з периметром $11\ см$ і $14\ см$. Знайти довжину цієї медіани.

11. Довести, що пряма, перпендикулярна бісектрисі кута, відсікає на сторонах кута рівні відрізки.

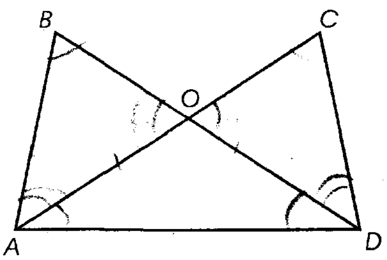
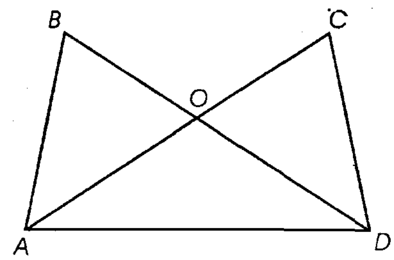
12. В рівнобедреному трикутнику ABC $\left(AB = BC\right)$ бісектриса кута A перетинає висоту, опущену на основу в точці O. Довести, що відрізок CO є бісектрисою кута C.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-3-1

Тема. Перша і друга ознаки рівності трикутників

<table>
<tr><th>В – І</th><th>9 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td>1. Довести рівність трикутників ABM і ABN (точки M і N лежать в різних півплощинах відносно прямої AB), якщо відомо, що $AM = AN$ і $\angle MAB = \angle NAB$.</td><td colspan="2">1. Відрізки AB і AD рівні, AM – бісектриса $\angle BAD$. Довести рівність трикутників BAC і DAC, де точка C – довільна точка бісектриси AM.</td></tr>
<tr><td>2. Дано: $AB \cap CD$. $AO = BO$. $\angle CAB = \angle DBA$.
Довести: $\Delta OCA = \Delta ODB$.

</td><td colspan="2">2. Дано: $\Delta MAC = \Delta BAC$, $\angle MCA = \angle BCA$.
Довести: $AM = BM$.

</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th>12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td>1. На прямій MN узяті три точки A, O, B так, що точка O є серединою відрізка AB, а точки D і K лежать в одній півплощині відносно прямої MN, причому $AD = BK$ і $\angle MAD = \angle NBK$.
Довести рівність ΔDAO і ΔKBO.</td><td colspan="2">1. На прямій CD вибраний відрізок BA. Від кінців відрізка відкладені $BM = AN$ (точки M і N – внутрішні точки відрізка BA). Поза прямою CD вибрана точка K так, що $BK = AK$, і $\angle CBK = \angle DAK$. Довести рівність ΔKMA і ΔKNB.</td></tr>
<tr><td>2. Дано: $\angle A = \angle K$, $AB = BK$.
Довести: $AC = KD$.

</td><td colspan="2">2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.
Довести: $BM = AK$.

</td></tr>
</table>

САМОСТІЙНА РОБОТА С-3-2
Тема. Рівнобедрений трикутник. Третя ознака рівності трикутників

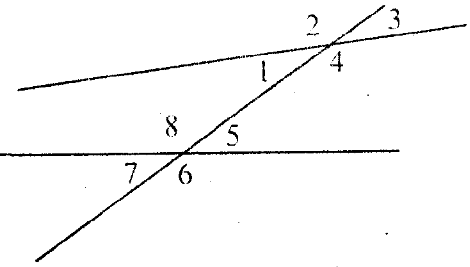
<table>
<tr><th>В – І</th><th colspan="2">7 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Периметр рівнобедреного трикутника $20,2\ см$. Знайти сторони цього трикутника, якщо його основа на $4\ см$ більше бічної сторони.</td><td colspan="2">1. Бічна сторона рівнобедреного трикутника в $1,2$ рази більше основи. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює $20,4\ см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. ΔABC – рівнобедрений з основою AC; BO – медіана цього трикутника. Довести, що ΔABO і ΔCBO рівні.</td><td colspan="2">2. ΔABC – рівнобедрений з основою AC, BO – висота, опущена на основу. Довести, що ΔABO і ΔCBO рівні.</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th colspan="2">9 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В ΔABC $\angle A = \angle B$. Знайти сторони цього трикутника, якщо його периметр $11,2\ см$, а сторона AB складає $0,8$ сторони AC.</td><td colspan="2">1. В ΔABC $AC : AB = 3:4$. Знайти сторони трикутника, якщо периметр ΔABC дорівнює $9,9\ см$, а $\angle A = \angle C$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Дано: ΔAOD – рівнобедрений; $\angle BAO = \angle CDO$. Довести: $\angle B = \angle C$.

</td><td colspan="2">2. Дано: ΔAOD – рівнобедрений, $\angle BAD = \angle CDA$.
Довести: $AB = DC$.

</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-2

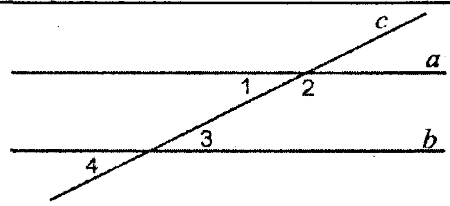
Тема. Рівнобедрений трикутник

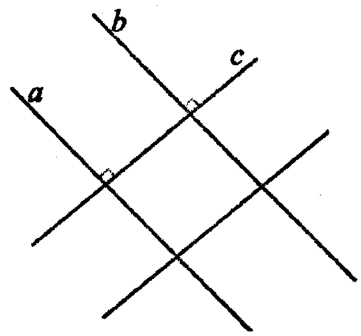
В – І	9 балів	В – ІІ
1. Знайти основу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр $17\ см$, а бічна сторона $3{,}5\ см$.		1. Знайти бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр $19\ см$, а основа $6\ см$.
2. В рівнобедреному ΔABC з основою AC проведена медіана BM. На продовженні медіани за точку M узята точка D. Довести, що $\Delta AMD = \Delta CMD$.		2. В рівнобедреному ΔABC з основою AC проведена бісектриса BM. На продовженні бісектриси за точку M взята точка D. Довести, що $\Delta AMD = \Delta CMD$.
3. На бічних сторонах рівнобедреного ΔABC відкладені рівні відрізки BM і BN. BD – висота трикутника Довести, що $MD = ND$.		3. На бічних сторонах рівнобедреного ΔABC відкладені рівні відрізки BM і BN. BM – медіана трикутника. Довести, що $MD = ND$.
В – ІІІ	**12 балів**	**В – IV**
1. В рівнобедреному ΔABC з основою AB проведена медіана CD. Знайти її довжину, якщо периметр ΔABC дорівнює $36\ см$, а периметр ΔACD дорівнює $28\ см$.		1. В рівнобедреному ΔABC з основою BC проведена медіана AD. Знайти її довжину, якщо периметр ΔABC дорівнює $64\ дм$, а периметр ΔABD дорівнює $52\ дм$.
2. В рівнобедреному ΔABC точка D – середина основи AC. На променях AB і CB поза ΔABC позначені відповідно точки M і N так, що $BM = BN$. Довести, що $\Delta BDM = \Delta BDN$.		2. В рівнобедреному ΔABC точка D – середина основи AC. На променях AB і CB поза ΔABC позначені відповідно точки M і N так, що $\angle BDM = \angle BDN$. Довести, що $\Delta BDM = \Delta BDN$.
3. $\Delta ABM = \Delta ABN$. Довести, що прямі AB і MN перпендикулярні в тому випадку, коли відрізки AB і MN перетинаються.		3. $\Delta ABM = \Delta ABN$. Довести, що відрізки AB і MN перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл.

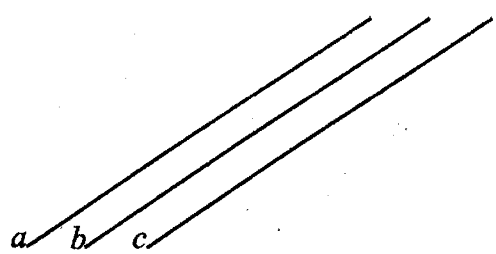
§4. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

<table>
<tr><th colspan="2">Кути при перетинанні двох прямих січною</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>При перетині двох прямих третьою, січною, утворюються:
а) внутрішні односторонні: $\angle 1$ і $\angle 8$; $\angle 4$ і $\angle 5$.
б) внутрішні різносторонні: $\angle 1$ і $\angle 5$; $\angle 4$ і $\angle 8$.
в) відповідні: $\angle 1$ і $\angle 7$; $\angle 4$ і $\angle 6$; $\angle 2$ і $\angle 8$; $\angle 3$ і $\angle 5$.</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ознаки паралельності прямих</th></tr>
<tr><td>$a \perp c; b \perp c$, то $a \parallel b$

1. Дві прямі паралельні, якщо:
а) внутрішні різносторонні кути рівні;

б) відповідні кути рівні;
в) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.</td><td>

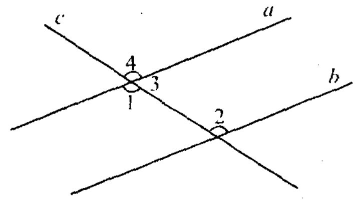
$a \parallel b$.
а) $\angle 1 = \angle 3$;
б) $\angle 1 = \angle 4$;
в) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.</td></tr>
<tr><td>2. Дві прямі, які перпендикулярні третій прямій, паралельні.</td><td>

$a \perp c; b \perp c$, то $a \parallel b$.</td></tr>
<tr><td>3. Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.</td><td>

$a \parallel b$; $c \parallel b$; то $a \parallel c$.</td></tr>
</table>

Властивості паралельних прямих

1. Якщо дві прямі паралельні, то:
а) внутрішні різносторонні кути рівні;
б) відповідні кути рівні;
в) внутрішні односторонні кути в сумі дорівнюють $180°$.



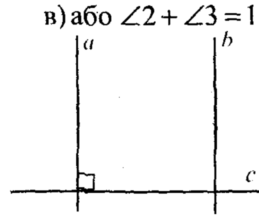
$a \parallel b$, тобто

а) $\angle 1 = \angle 2$;

б) або $\angle 2 = \angle 4$;

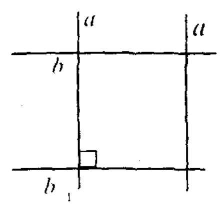
в) або $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

2. Якщо пряма перпендикулярна одній із двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і другій паралельній прямій.



$a \parallel b, c \perp a$, то $b \perp c$.

3. Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом перпендикулярним прямим, то вони перпендикулярні.



$a \cap b$ і

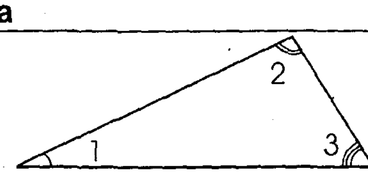
$a \parallel a_1$

$b \parallel b_1$

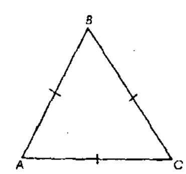
$a_1 \perp b_1$, то $a \perp b$.

Сума кутів трикутника

1. Сума кутів трикутника дорівнює $180°$.
2. У будь-якому трикутнику хоча б два кути гострі.
3. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $60°$, то цей трикутник – рівносторонній, тобто у рівностороннього трикутника кожний кут дорівнює $60°$.

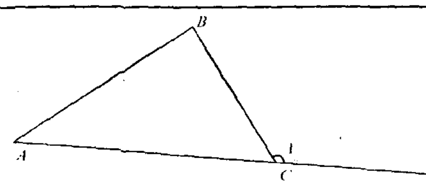


$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$



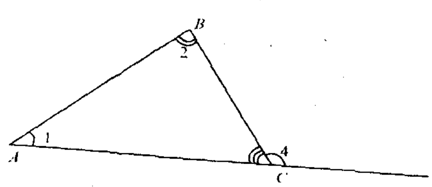
$AB = BC = AC$.

Зовнішнім кутом трикутника при даній вершині називається кут, суміжний з кутом трикутника при цій вершині.



$\angle 1$ — зовнішній кут ΔABC.

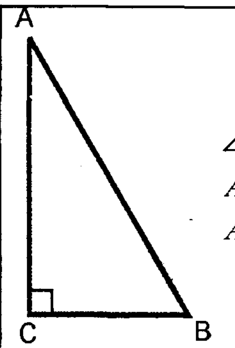
Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.



$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$. $\angle 4 > \angle 1$, $\angle 4 > \angle 2$.

Прямокутний трикутник

Трикутник називається прямокутним, якщо він має прямий кут.



$\angle C = 90^\circ$,

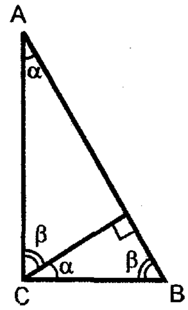
AB — гіпотенуза,

AC, BC — катети.

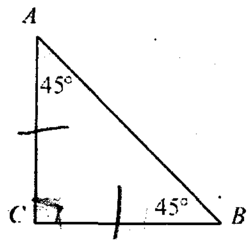
Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

$\angle A + \angle B = 90^\circ$.

Висота прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, розбиває трикутник на два прямокутних трикутники, гострі кути яких рівні гострим кутам даного трикутника.



У прямокутного рівнобедреного трикутника гострі кути дорівнюють по 45° кожний.

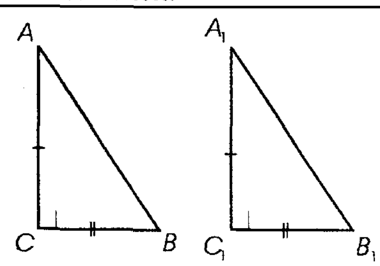


$AC = BC, \angle A = \angle B = 45^\circ$.

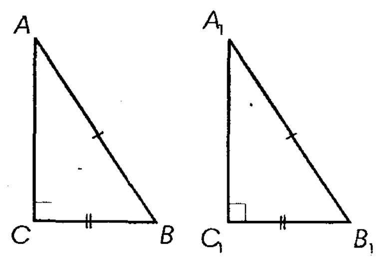
Ознаки рівності прямокутних трикутників

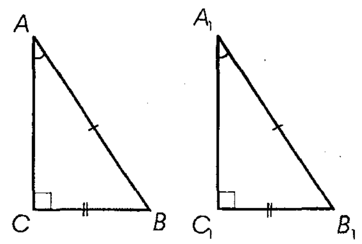
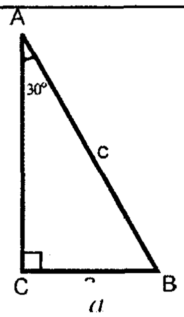
Для порівняння двох прямокутних трикутників достатньо знайти два відповідно рівних елементи.

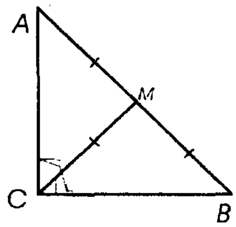
Перша ознака: за двома катетами.
Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно рівні двом катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.



Друга ознака: за гіпотенузою і катетом.
Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно рівні гіпотенузі і катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

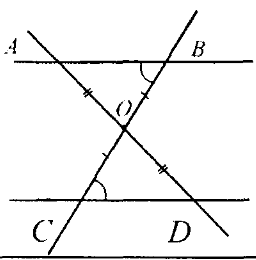
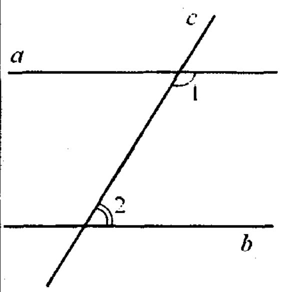


<table>
<tr><td>Третя ознака: за гіпотенузою і гострим кутом.
Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно рівні гіпотенузі і гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
Четверта ознака: за катетом і гострим кутом.
Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно рівні катету і гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>У прямокутному трикутнику супротив кута 30° лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи.</td><td>

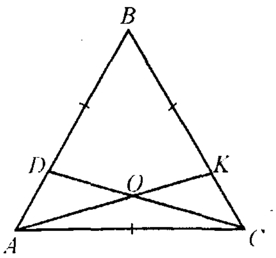
$c = 2a;\ a = \frac{1}{2}c.$</td></tr>
<tr><td>Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.</td><td>

CM – медіана,
$CM = AM = BM$,
$CM = \frac{1}{2}AB$.</td></tr>
</table>

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

<table>
<tr><td colspan="2">1. На рисунку знайти паралельні прямі і довести їх паралельність.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Дано: $AB \parallel CD$.</td></tr>
<tr><td>Розв'язання.
Доведемо це: $\Delta AOB = \Delta COD$, оскільки $BO = CO$; $AO = DO$ за умовою, $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні (перша ознака). Із рівності трикутників випливає, що $\angle ABO = \angle DCO$, а це внутрішні кути при прямих AB, CD та січній BC, отже, $AB \parallel CD$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих третьою прямою, відносяться як $2:3$. Чому дорівнюють ці кути?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Дано: $a \parallel b$, c – січна, $\angle 1$ і $\angle 2$ – внутрішні односторонні кути,
$\angle 1 : \angle 2 = 2:3$. Знайти $\angle 1$ і $\angle 2$.</td></tr>
<tr><td>Розв'язання.
Якщо величини кутів відносяться як $2:3$, то можна їх позначити: $\angle 1 = 2x$; $\angle 2 = 3x$. Відомо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (властивість внутрішніх односторонніх кутів).
Складемо рівняння: $2x + 3x = 180^\circ$
$5x = 180^\circ$ $2x = 72^\circ$,
$x = 36^\circ$, $3x = 108^\circ$, тобто $\angle 1 = 72^\circ$, $\angle 2 = 108^\circ$.</td></tr>
<tr><td>Відповідь: $72^\circ; 108^\circ$.</td></tr>
</table>

3. Бісектриси AK і CD рівностороннього ΔABC перетинаються в точці O. Знайти $\angle DOA$.



Дано: ΔABC; $AB = BC = AC$; $AK \cap CD = O$.
AK і CD – бісектриси.
Знайти: $\angle DOA$.

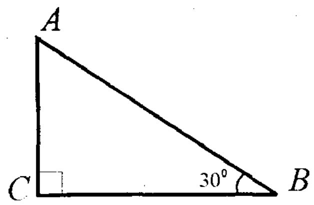
Розв'язання.

1-й спосіб. В рівносторонньому трикутнику кути рівні і мають по $180^\circ : 3 = 60^\circ$. Бісектриси поділяють кути навпіл, тому $\angle OAC = \angle OAD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$, тоді в ΔAOC $\angle OCA = 30^\circ$, і $\angle AOC = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$. $\angle DOA$ суміжний з $\angle AOC$, отже, $\angle DOA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

2-й спосіб. $\angle DOA$ – зовнішній кут ΔAOC і за властивістю зовнішнього кута $\angle DOA = \angle OAC + \angle OCA$, $\angle DOA = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Відповідь: $\angle DOA = 60^\circ$.

4. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а сума гіпотенузи і меншого з катетів дорівнює $30\ см$. Знайти гіпотенузу трикутника.



Дано: ΔABC; $\angle C = 90^\circ$; $\angle B = 30^\circ$; $AB + AC = 30\ см$.
Знайти: AB.

Розв'язання.

Нехай $AB = x$. Катет, що лежить супротив кута 30° у прямокутному трикутнику, дорівнює половині гіпотенузи: $AC = \frac{x}{2}$. За умовою, $AB + AC = 30\ см$, оскільки лежать супротив меншого кута, отже, $x + \frac{x}{2} = 30$, $\frac{3}{2}x = 30$;

$3x = 60$, $x = 20$, $AB = 20\ см$.

Відповідь: $20\ см$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Дано: $AC = CD$; $\angle 1 = \angle 2$ (рис.1).
Довести: $AB \parallel CD$.

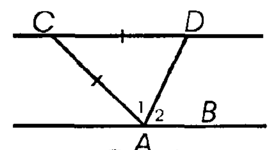
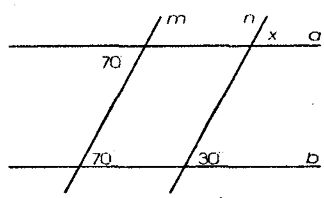
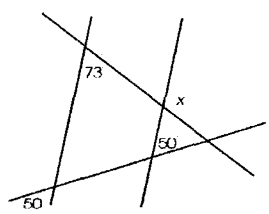


Рис. 1.

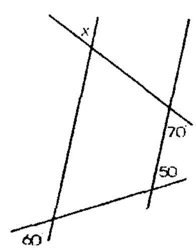
2. Обчислити градусну міру кута X:



а)



б)



в)

3. Довести, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою прямою, утворюють прямий кут.

4. $\angle AOE = 100^\circ$, різниця кутів DKF і FKC складає 20°.
Довести, що прямі AB і CD паралельні.

5. Дві прямі AB і CD перетинаються третьою прямою EF так, що $\angle CKF = 72^\circ$, $\angle BOK = 108^\circ$ (рис. 2). Довести, що прямі AB і CD паралельні.

6. Паралельні прямі AB і CD перетинаються третьою прямою EF. Один із утворених кутів дорівнює 53°. Знайти інші 7 кутів.

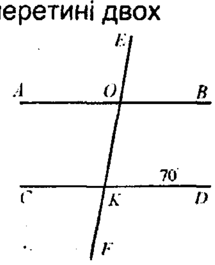


Рис. 2.

7. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 88°. Знайти кути при основі трикутника.

8. Зовнішній кут трикутника дорівнює 90°. Знайти величину кожного із внутрішніх кутів, не суміжних з ним, якщо вони відносяться як $3:5$.

9. Довести, що бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою, паралельні.

10. Відомо, що $AC = BC$ і $MN \parallel AB$. Довести, що трикутник MNC – рівнобедрений.

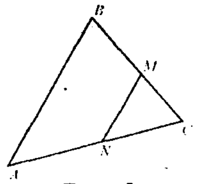


Рис. 3.

11. Відрізки AF і BD перетинаються так, що $AC = CB$, відрізки AB і DF паралельні.
Довести, що $BD = AF$ (рис.4).

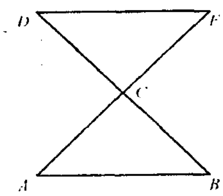


Рис. 4.

12. В трикутнику ABC $\angle B = 80^\circ$. З вершини кута A проведена висота AD. Знайти кути утвореного трикутника ABD.

13. В трикутнику ABC $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 63^\circ$. Визначити кути, які утворює висота трикутника, опущена з вершини C, зі сторонами AC і BC.

14. В трикутнику два кути, дорівнюють, відповідно 65° і 42°. Знайти, під яким кутом перетинаються бісектриси цих кутів.

15. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 24°. Знайти кути, утворені бісектрисами цього і прямого кутів трикутника.

16. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 28°. Знайти кут, утворений бісектрисами гострих кутів.

17. Знайти кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

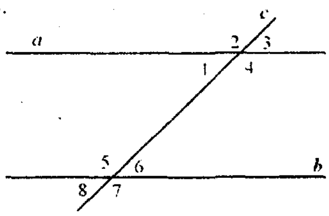
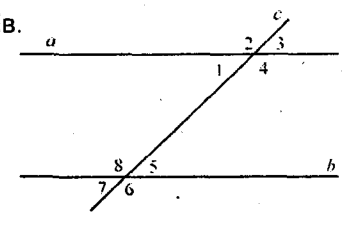
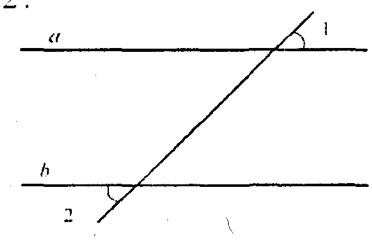
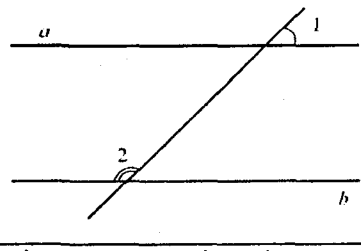
18. Бісектриса кута при вершині рівнобедреного трикутника утворює з його стороною кут у 60°. Визначити висоту трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 33 *см*.

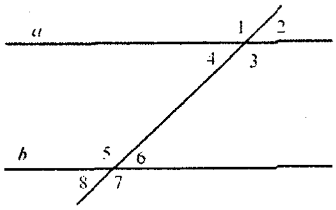
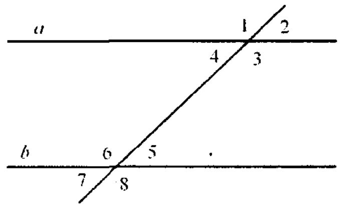
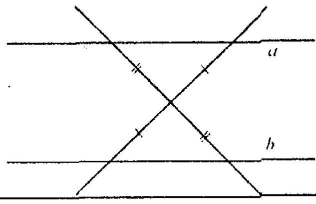
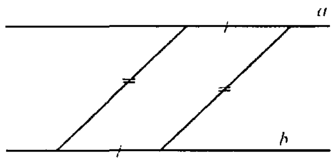
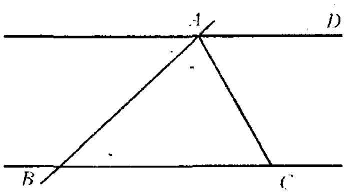
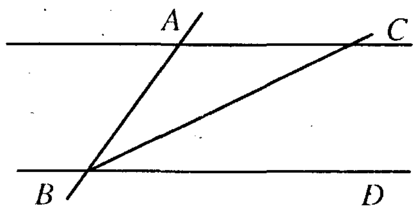
19. Довести, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна основі трикутника.

20. В рівнобедреному трикутнику сума внутрішніх кутів разом з одним зовнішнім складає 310°. Визначити внутрішні кути трикутника (два випадки).

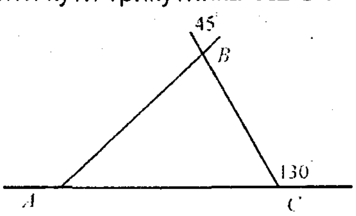
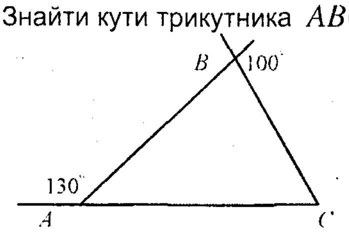
САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-1

Тема. Властивості кутів при паралельних прямих та січній

<table>
<tr><th>В – I</th><th>7 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Дано: $a \parallel b$, $\angle 6 = 34^\circ$.
Знайти решту кутів.
</td><td>1. Дано: $a \parallel b$, $\angle 8 = 112^\circ$.
Знайти решту кутів.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$.
Довести: $a \parallel b$.
</td><td>2. Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.
Довести: $a \parallel b$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих третьою прямою, відносяться як $2:3$. Знайти ці кути.</td><td>3. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою прямою, більше іншого на 32°. Знайти ці кути.</td></tr>
</table>

В – III	12 балів	В – IV
1. Дано: $a \parallel b$, $\angle 5$ на 70° більше $\angle 6$. Знайти ці кути. 		1. Дано: $a \parallel b$, $\angle 5$ менше $\angle 3$ на 23°. Знайти всі кути. 
2. Використовуючи дані рисунку, довести: $a \parallel b$. 		2. Використовуючи дані рисунку, довести: $a \parallel b$. 
3. Дано: $AD \parallel BC$; $\angle ACB = 40^\circ$. AC – бісектриса $\angle BAD$. Знайти: $\angle ABC$. 		3. Дано: $AD \parallel BD$; $\angle ACB = 37^\circ$. BC – бісектриса $\angle ABD$. Знайти: $\angle BAC$. 

САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-2

В – І	7 балів	В – ІІ
1. Знайти кути трикутника ABC. 		1. Знайти кути трикутника ABC. 
2. Внутрішні кути ΔABC відносяться як $2:3:4$. Знайти кути цього трикутника.		2. Внутрішні кути ΔABC відносяться як $3:5:7$. Знайти кути цього трикутника.
3. У трикутнику ABC $\angle A = 80^\circ$; $\angle B = 40^\circ$. Бісектриса $\angle A$ перетинає сторону трикутника в точці K. Знайти кут AKC.		3. У трикутнику ABC $\angle A = 50^\circ$; $\angle B = 70^\circ$. Точка O – точка перетину їх бісектрис. Знайти кут AOB.
В – III	**12 балів**	**В – IV**
1. Знайти кути трикутника, якщо два з них відносяться як $3:7$, а третій дорівнює половині їх різниці.		1. Знайти кути трикутника, якщо два з них відносяться як $3:5$, а третій дорівнює їх півсумі.
2. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 136°. Знайти внутрішні кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один з них на 22° більше іншого.		2. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 126°. Знайти внутрішні кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із них у 2 рази більше іншого.
3. Бісектриси гострого і прямого кутів прямокутного трикутника перетинаються під кутом 130°. Знайти гострі кути трикутника.		3. Відношення гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $8:7$. Знайти кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

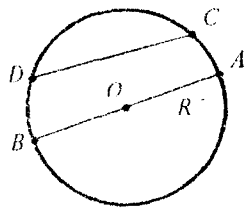
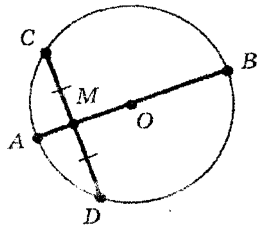
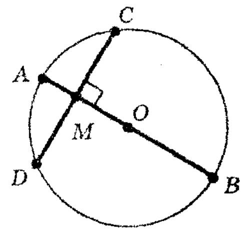
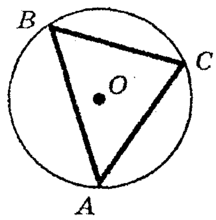
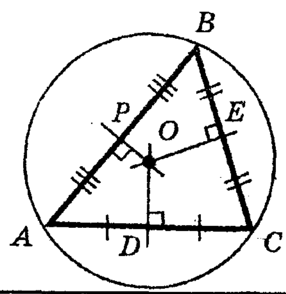
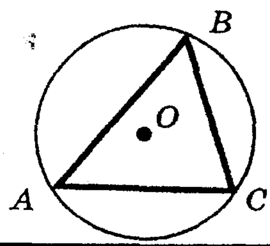
КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-3

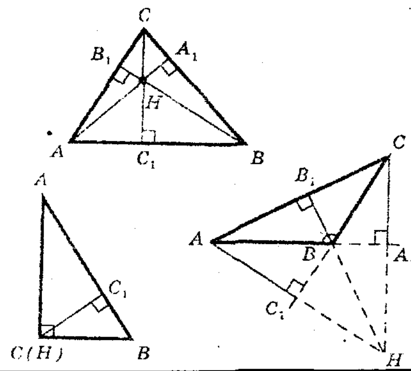
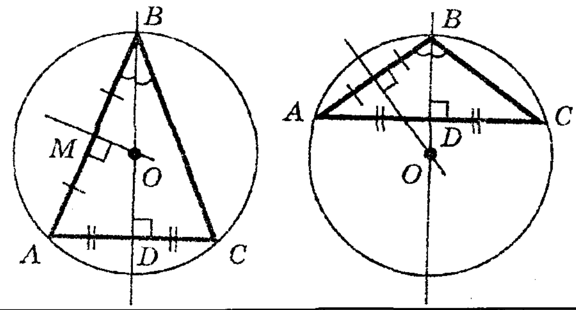
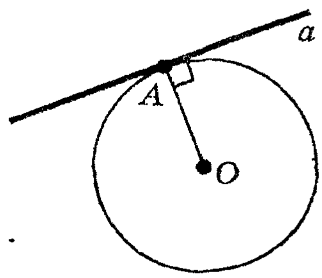
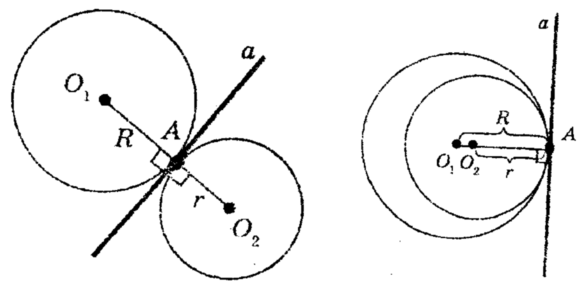
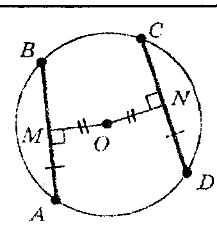
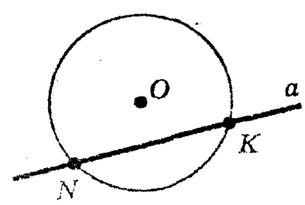
Тема. Властивості кутів при паралельних прямих і січній. Властивості кутів трикутника

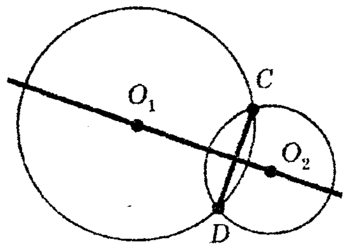
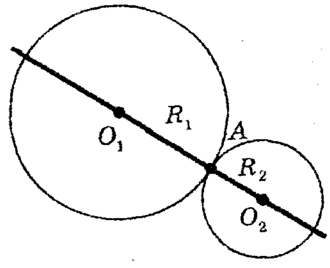
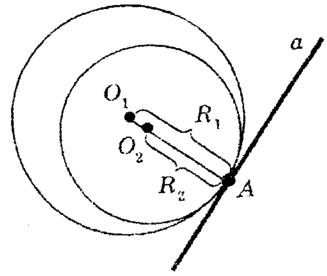
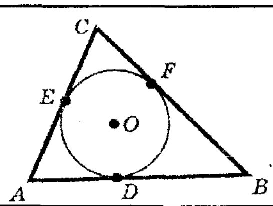
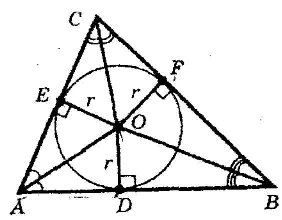
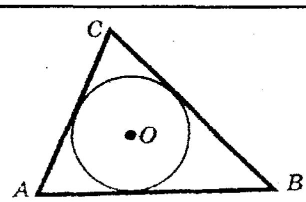
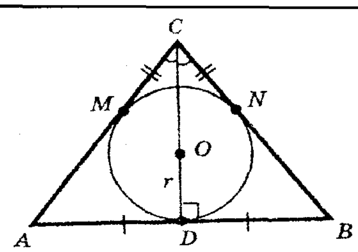
<table>
<tr><th>В – І</th><th>7 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Сума внутрішніх різносторонніх кутів при $a \parallel b$ і січній c дорівнює $102°$. Знайти всі утворені кути.</td><td>1. Різниця внутрішніх односторонніх кутів при $a \parallel b$ і січній c дорівнює $102°$. Знайти всі утворені кути.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, а кут B у 12 разів менше кута C. Знайти невідомі кути трикутника.</td><td>2. В трикутнику ABC $\angle A = 80°$, а кут C на $40°$ більше кута B. Знайти невідомі кути трикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. В прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ бісектриси CD і AE перетинаються в точці O. $\angle AOC = 105°$. Знайти гострі кути трикутника ABC.</td><td>3. В прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ бісектриси CD і BE перетинаються в точці O. $\angle BOC = 95°$. Знайти гострі кути трикутника ABC.</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th>12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній дорівнює $54°$. Чи може різниця внутрішніх односторонніх кутів при даних паралельних прямих з тією самою січною дорівнювати $125°$?</td><td>1. Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній дорівнює $44°$. Чи може сума двох внутрішніх різносторонніх кутів при даних паралельних прямих з тією самою січною дорівнювати $135°$?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. У трикутнику ABC $\angle A$ менше $\angle B$ у 3 рази, а зовнішній кут при вершині A більше зовнішнього кута при вершині B на $40°$. Знайти внутрішні кути трикутника ABC.</td><td>2. У трикутнику ABC $\angle A$ менше $\angle B$ на $80°$, а зовнішній кут при вершині A більше зовнішнього кута при вершині B у 2 рази. Знайти внутрішні кути трикутника ABC.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. У ΔABC кут C дорівнює $90°$, а кут B дорівнює $70°$. На катеті AC відкладений відрізок CD, рівний CB. Знайти кути ΔABD.</td><td>3. У ΔABC кут C дорівнює $90°$, а кут B дорівнює $70°$. На промені CB відкладений відрізок CD, рівний CA. Знайти кути ΔABD.</td></tr>
</table>

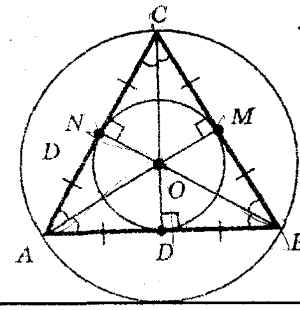
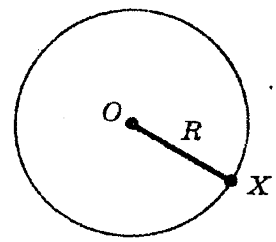
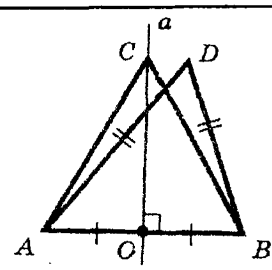
ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

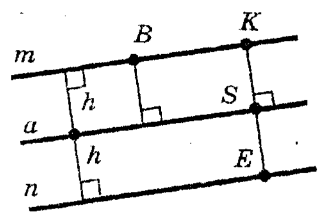
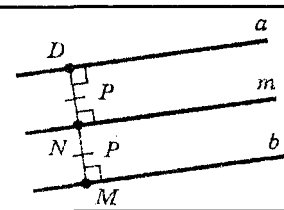
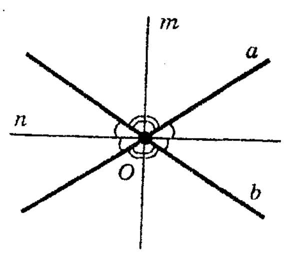
§5. КОЛО І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

Коло, хорди та дуги	
Коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра). O — центр кола; OA — радіус; AB — діаметр. CD — хорда (відрізок, який з'єднує дві точки кола). Найбільша хорда — діаметр.	
Властивості	
Діаметр кола, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї.	 $AB \perp CD$
Діаметр кола, який перпендикулярний до хорди, поділяє цю хорду навпіл.	 $CM = MD$
Коло, яке описане навколо трикутника	
Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.	
Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін цього трикутника, проведених через середини цих сторін.	
Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, і до того ж тільки одне.	

Властивості висот трикутника	
Прямі, що містять в собі висоти трикутника, перетинаються в одній точці.	
Центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, належить прямій, яка містить медіану, висоту і бісектрису, що проведені з вершини до основи.	
Дотична до кола	
Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається <u>дотичною</u>. Дотична до кола не має з ним інших спільних точок, крім точки дотику.	дотична 
Відстань між центрами O_1 і O_2 двох дотичних кіл у випадку зовнішнього дотику дорівнює: $O_1O_2 = R + r$, де R і r – радіуси кіл; у випадку внутрішнього дотику $O_1O_2 = R - r\ (R > r)$.	 $O_1O_2 = R + r$ $O_1O_2 = R - r$
У колі рівні хорди однаково віддалені від центра кола, і навпаки, хорди, однаково віддалені від центра кола, рівні.	 $OM = ON$
Коло і пряма не можуть перетинатися більше, ніж у двох точках.	

Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, перпендикулярна до прямої, що проходить через центри цих кіл.	 $CD \perp O_1O_2$
Якщо два кола мають тільки одну спільну точку, то вона належить прямій, що проходить через центри цих кіл.	 $A \in O_1O_2$
Якщо два кола мають тільки одну спільну точку, то вони дотикаються одне до одного в цій точці.	
Якщо із однієї точки до кола проведені дві дотичні, то відрізки дотичних рівні.	$AB = AC$
Коло, вписане у трикутник	
Коло називається <u>вписаним у трикутник</u>, якщо воно дотикається всіх сторін трикутника.	
Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис трикутника.	
У будь-який трикутник можна вписати коло, до того ж тільки одне.	
Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, належить медіані, висоті і бісектрисі, які проведені з вершини до основи.	 $O \in CD$

<table>
<tr><td>Центри кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, і кола, вписаного в нього, збігаються. Це точка перетину медіан, бісектрис і висот рівностороннього трикутника.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Геометричне місце точок</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Геометричним місцем точок</u> (ГМТ) площини називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певні властивості.
А саме:
1.Якщо точка належить фігурі, то вона має дану властивість.
2. Якщо точка має дану властивість, то вона належить фігурі.</td></tr>
<tr><td>Геометричним місцем точок, рівновіддалених від даної точки, є коло з центром у цій точці і з радіусом, який дорівнює даній відстані.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох даних точок, є серединний перпендикуляр до відрізка, який з'єднує ці точки.</td><td>

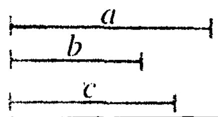
$DA = DB$; $D \in a$</td></tr>
<tr><td>Геометричне місце точок, віддалених від даної прямої на відстань h, складається з двох прямих, паралельних даній і віддалених від неї на відстань h.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих, є пряма, паралельна даним прямим і однаково віддалена від них.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються, складається з двох прямих, які містять бісектриси кутів, отриманих в результаті перетину даних прямих.</td><td>

$a \cap b$
m, n містять бісектриси</td></tr>
</table>

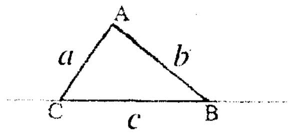
Побудова трикутника за трьома його сторонами

1. Побудувати трикутник з даними сторонами a, b, c.

Дано:



Побудувати ΔABC.



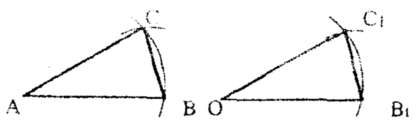
Побудова.

1. Побудуємо довільну пряму і на ній позначимо довільну точку B.
2. Розхилом циркуля, рівним a, відкладемо на побудованій прямій від точки B відрізок $BC = a$.
3. Розхилом циркуля, рівним c, опишемо коло з центром в точці B.
4. Розхилом циркуля, рівним b, опишемо коло з центром в точці C. Позначимо буквою A точку перетину цих кіл.
5. З'єднаємо відрізками точку A з точками B і C. ΔABC — шуканий, оскільки $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ за побудовою.

Примітка. Задача має розв'язок, тільки якщо сума довжин двох даних відрізків більша довжини третього.

Побудова кута, рівного даному

2. Відкласти від даної півпрямої в дану півплощину кут, рівний даному куту.



Дано: $\angle BAC$; півплощина; OB_1 – півпряма; побудувати $\angle B_1OC_1 = \angle BAC$.

Побудова.

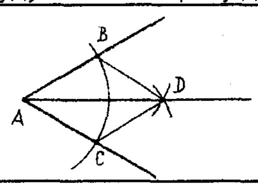
1. Побудуємо довільне коло з центром в точці A даного кута. Позначимо буквами B і C перетини цього кола зі сторонами кута BAC.
2. Радіусом AB проведемо коло з центром в точці O, початковій точці заданої півпрямої. Перетин цього кола і півпрямої позначимо B_1.
3. Радіусом BC з центром в точці B_1 опишемо коло. Побудовані кола перетинаються в двох точках, позначимо буквою C_1 точку їх перетину в заданій півплощині, $\angle B_1OC_1 = \angle BAC$.

Доведення.

$\Delta BAC = \Delta B_1OC_1$ за трьома сторонами ($AB = OB_1; AC = OC_1; CB = B_1C_1$ за побудовою). Кути BAC і B_1OC_1 — відповідні, отже, $\angle BAC = \angle B_1OC_1$, що й потрібно було довести.

Побудова бісектриси кута

3. Побудувати бісектрису даного кута.



Дано: $\angle A$.

Побудувати бісектрису $\angle A$.

Побудова.

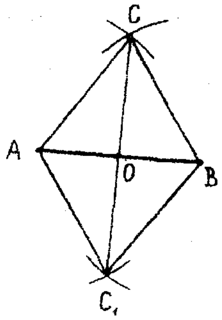
1. Опишемо коло з центром в точці A довільного радіуса, воно перетне сторони кута в точках B і C.
2. Із точок B і C тим самим радіусом опишемо кола, точку їх перетину позначимо буквою D.
3. Проведемо півпряму AD, яка і є бісектрисою кута A.

Доведення.

$AB = AC = BD = CD$ за побудовою; AD – спільна, отже, $\Delta ABD = \Delta ACD$ за трьома сторонами, тоді і відповідні кути рівні: $\angle DAB = \angle DAC$, тобто AD – бісектриса $\angle A$, що й потрібно було довести.

Поділ відрізка навпіл

4. Поділити відрізок навпіл.



Дано: AB – відрізок.

Побудувати точку $O \in AB$ так, щоб $AO = OB$.

Побудова.

1) Із точок A і B радіусом AB проведемо кола, які перетинаються в двох точках, позначимо їх C і C_1.

2) Ці точки лежать в різних півплощинах відносно прямої AB, пряма CC_1 перетне AB в точці O. $AO = OB$.

Доведення.

1) $AC = AC_1 = BC = BC_1$ за побудовою, CC_1 – спільна, тоді $\Delta CAC_1 = \Delta CBC_1$ за трьома сторонами, отже, $\angle ACO = \angle BCO$ як відповідні в рівних трикутниках.

2) $\Delta ACO = \Delta BCO$ за двома сторонами і кутом між ними ($AC = BC; CO$ – спільна, $\angle ACO = \angle BCO$, перша ознака), тобто, відповідні сторони рівні: $AO = BO$, що й потрібно було довести.

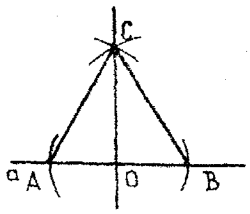
Побудова прямої, що проходить через дану точку і перпендикулярна до даної прямої

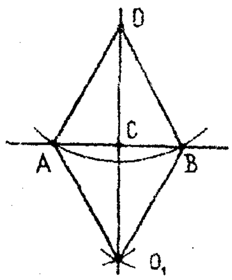
5. Через дану точку O провести пряму, перпендикулярну даній прямій a.

Можливі два випадки:

1) Точка O лежить на прямій a.

2) Точка O не лежить на прямій a.





Побудова.

1-й випадок. 1) Із точки O довільним радіусом проведемо коло, яке перетне пряму a в точках A і B.

2) Із точок A і B проведемо кола з радіусом, рівним AB. Нехай C – точка їх перетину, тоді $CO \perp AB$.

Доведення.

$\Delta ACO = \Delta BCO$ за трьома сторонами ($AC = BC; AO = OB$; CO – спільна), отже, $\angle AOC = \angle BOC$, а вони суміжні, тобто $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ і $CO \perp AB$, що й потрібно було довести.

2-й випадок. 1) Із точки O проведемо коло довільного радіуса, що перетне пряму a в точках A і B.

2) Із точок A і B проведемо кола тим же радіусом, позначимо буквою O_1 точку їх перетину, яка лежить в тій півплощині відносно AB, в якій не лежить точка O.

Доведення.

1) Нехай OO_1 перетинає AB в точці C. $\Delta AOB = \Delta AO_1B$ за трьома сторонами ($OA = OB = O_1A = O_1B; AB$ – спільна, третя ознака), тобто $\angle OAC = \angle O_1AC$ як відповідні.

2) $\Delta OAC = \Delta O_1AC$ за двома сторонами і кутом між ними (AC – спільна, $AO = AO_1$; $\angle OAC = \angle O_1AC$; перша ознака), тоді $\angle ACO = \angle ACO_1$ як відповідні в рівних трикутниках.

3) $\angle ACO = \angle ACO_1$ і вони суміжні, отже, $\angle ACO = \angle ACO_1 = 90^\circ$, тобто $OO_1 \perp AB$, що й потрібно було довести.

6. Дано: ΔABC. Побудувати висоти ΔABC.

Побудова.

Розглянемо три випадки:

а) Гострокутний ΔABC. (рис.1). б) Тупокутний ΔABC. (рис.2). в) Прямокутний ΔABC. (рис.3).

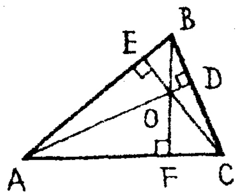


Рис.1

$BF \perp AC; AD \perp BC; CE \perp AB.$

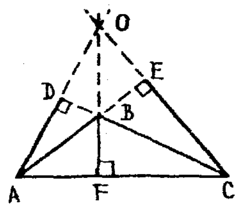


Рис.2

$BF \perp AC; CE \perp AB; AD \perp CB.$

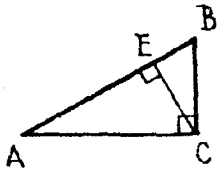


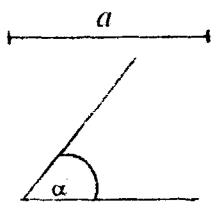
Рис:3

$BC \perp AC; AC \perp BC; CE \perp AB.$

Примітка. Три висоти трикутника, якщо вони проведені точно, перетинаються в одній точці, ця точка в гострокутному трикутнику лежить всередині його, в тупокутному — поза ним (висоти, проведені з вершин гострих кутів, падають на продовження сторін трикутника), в прямокутному трикутнику співпадає з вершиною прямого кута (дві висоти співпадають із катетами прямокутного трикутника).

7. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.

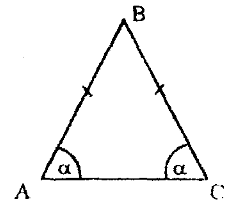
Дано:



a – бічна сторона;

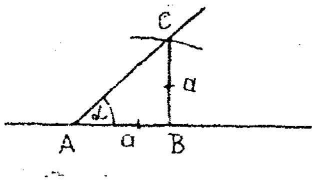
α – кут при основі.

Аналіз:



Побудувати ΔABC, де $AB = BC = a$ і $\angle BAC = \alpha$.

Побудова.



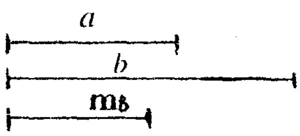
1) На довільній прямій від довільної точки відкладаємо відрізок $AB = a$.
2) Від променя AB відкладаємо $\angle BAC = \alpha$.
3) Із точки B як із центра радіусом $R = a$ проведемо коло до перетину з променем AC в точці C. ΔABC – шуканий.

Доведення.

$AB = BC = a$ за побудовою; $\angle BAC = \alpha$ за побудовою, отже, ΔABC — рівнобедрений і відповідає всім умовам задачі.

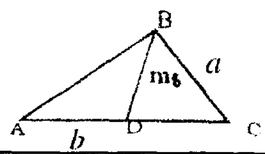
8. Побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до одної з них.

Дано:

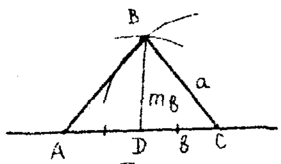


Побудувати ΔABC.

Аналіз:



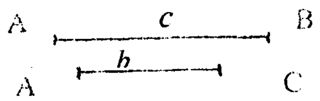
Побудова.

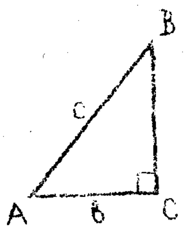
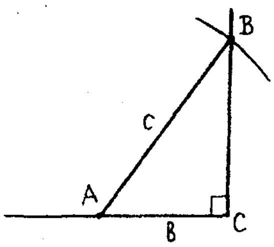


1) Побудуємо на довільній прямій від довільної точки A відрізок $AC = b$.
2) Поділимо AC навпіл: $AD = DC$.
3) Із точки D як із центра проведемо коло з радіусом $R_1 = m_b$.
4) Із точки C як із центра проведемо коло радіусом a.
5) Позначимо буквою B одну із точок перетину кіл і з'єднаємо точки B і A. ΔABC – шуканий.

Доведення.

В ΔABC $AC = b$ за побудовою; $AD = DC$, отже, BD – медіана, $BD = m_b$ за побудовою; $BC = a$ також за побудовою, отже, ΔABC відповідає всім умовам задачі.

<table>
<tr><td colspan="2">9. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом.</td></tr>
<tr><td>Дано:


Побудувати прямокутний трикутник.</td><td>Аналіз:

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Побудова.
1) Побудуємо $\angle C = 90^\circ$.
2) На одній із сторін $\angle C$ відкладемо від вершини C відрізок $CA = b$.
3) Із точки A як із центра опишемо коло радіусом $R = c$ до перетину з другою стороною $\angle C$.
ΔABC – шуканий.
Доведення.
ΔABC – прямокутний, тому що $\angle BCA = 90^\circ$ за побудовою. За побудовою ж катет $AC = b$ і гіпотенуза $AB = c$, отже, ΔABC відповідає всім умовам задачі.</td></tr>
</table>

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Побудувати прямокутний трикутник за катетом a і прилеглим гострим кутом β.
2. Побудувати бісектрису і висоту трикутника, проведені із однієї вершини.
3. Побудувати трикутник ABC за сторонами $AC = 3$ *см*, $BC = 5$ *см* і кутом $C = 50^\circ$.
4. Побудувати трикутник MNK, якщо $MK = 2{,}5$ *см*. $\angle M = 70^\circ$; $\angle N = 10^\circ$.
5. Радіуси двох кіл дорівнюють 14 *см* і 17 *см*. Знайти відстань між їх центрами, якщо кола дотикаються:
   а) внутрішнім образом;
   б) зовнішнім образом.
6. Знайти кут ABC, якщо O – центр кола, $\angle AOC = 51^\circ$ (рис.1).
7. Довести, що $\angle CAB = \angle DAB$, якщо AB – діаметр кола, AC і AD – рівні хорди кола (рис. 2).

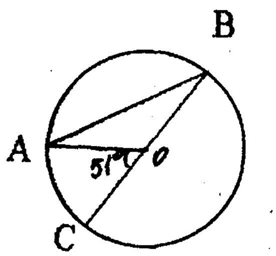


Рис.1.

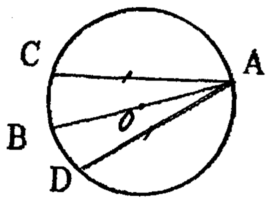


Рис.2.

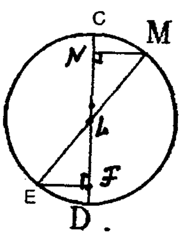


Рис.3.

8. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник за висотою, опущеною на гіпотенузу.
9. Описати коло навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною 3 *см* і кутом при основі 30°. Виміряти радіус цього кола.
10. Хорда ME кола (рис. 3) перетинає її діаметр CD в точці L, $ML = 10$ *см*, $MN = 5$ *см*. Знайти відрізок EL, якщо він більше EF на 4 *см*.
11. Три кола попарно зовнішньо дотикаються. Відрізки, що з'єднують їх центри, утворюють трикутник зі сторонами 17 *см*, 18 *см* и 19 *см*. Знайти радіуси кіл.

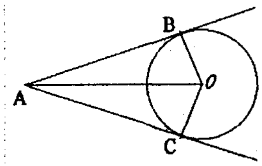
САМОСТІЙНА РОБОТА С-5-1

Тема. Коло

7 балів

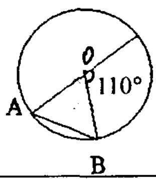
В – I

1. Дано: AB і AC – дотичні.



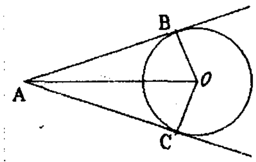
Довести: AO – бісектриса $\angle BOC$.

2. Знайти кути ΔAOB.



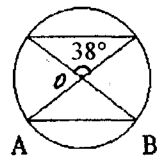
В – II

1. Дано: AB і AC – дотичні.



Довести: AO – бісектриса $\angle BAC$.

2. Знайти кути ΔAOB.

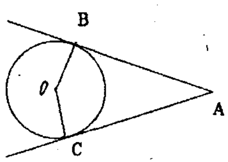


9 балів

В – III

1. Знайти відстань між центрами двох кіл у випадку зовнішнього дотику, якщо їх радіуси дорівнюють $33\ см$ і $51\ см$.

2. Дано: AB і AC – дотичні; $\angle A = 60°$.

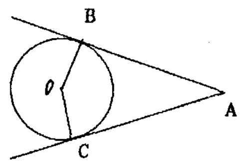


Знайти: $\angle BOC$.

В – IV

1. Знайти відстань між центрами двох кіл у випадку внутрішнього дотику, якщо їх радіуси дорівнюють $33\ см$ і $51\ см$.

2. Дано: AB і AC – дотичні; $\angle BOC = 100°$.

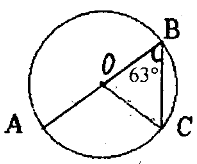


Знайти: $\angle A$.

12 балів

В – V

1. Дано: $\angle OBC = 63°$, O – центр кола.

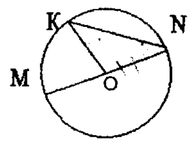


Знайти: $\angle AOC$.

2. Точка дотику вписаного кола поділяє бічну сторону рівнобедреного трикутника на відрізки $3\ см$ і $5\ см$, рахуючи від основи. Знайти периметр трикутника.

В – VI

1. Дано: $\angle KOM = 87°$, O – центр кола.



Знайти: $\angle KNM$.

2. Точка дотику вписаного кола поділяє бічну сторону рівнобедреного трикутника на відрізки $3\ см$ і $5\ см$, рахуючи від вершини, протилежної основі. Знайти периметр трикутника.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-5

9 балів

В – I	В – II
1. Довести, що якщо хорди рівновіддалені від центра кола, то вони рівні.	1. Довести, що якщо хорди кола рівні, то вони рівновіддалені від центра кола.
2. На даному колі знайти точки, рівновіддалені від кінців даної хорди.	2. На колі з центром O вибрана точка A. Знайти точки кола, рівновіддалені від точок O та A.
3. Побудувати кут ABC. Знайти точку O, яка віддалена від вершини кута на $4\ см$ і рівновіддалена від сторін кута.	3. На прямій a узята точка A. Знайти точку B, яка віддалена від точки A на $4\ см$ і від прямої a на $3\ см$. Скільки розв'язків має задача?

12 балів

В – III	В – IV
1. Кут між радіусами, проведеними до кінців хорди, дорівнює $40°$. Знайти кут між цією хордою і дотичною до кола в кінці хорди.	1. Кут між радіусами, проведеними до кінців хорди, дорівнює $80°$. Обчислити кут, утворений хордою і дотичною до кола в кінці хорди.
2. Побудувати центр кола, описаного навколо даного трикутника.	2. Побудувати центр кола, вписаного в даний трикутник.
3. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною із вершини при основі.	3. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною із вершини при основі.

ВІДПОВІДІ

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

§4. 2. а) 30°; б) 107°; в) 70°. **7.** 44°; 44°. **8.** 40°; 50°. **12.** 20°. **13.** 35°; 27°. **14.** 126°.

15. 123°. **16.** 135°. **17.** 135°. **18.** 16,5 *см.* **20.** 65°; 65°; 50° або 50°; 50°; 80°.

§5. 5. а) 3 *см*; б) 31 *см.* **6.** 25°30'. **11.** 8 *см*; 9 *см*; 10 *см.*

САМОСТІЙНІ РОБОТИ

С-3-2. В-І. 1. 8,1 *см.* **В-ІІ. 1.** 6 *см*; 7,2 *см*; 7,2 *см.* **В-ІІІ. 1.** 4,4 *см*; 3,2 *см.* **2.** 66°.

В-IV. 1. 3,6 *см*; 3,6 *см*; 2,7 *см.* **2.** 80°.

С-4-1. В-І. 3. 36° та 108°. **В-ІІ. 3.** 74° та 106°. **В-ІІІ. 1.** 125° та 55°. **3.** 100°. **В-IV. 3.** 106°.

С-4-2. В-І. 1. 45°; 50°; 85°. **2.** 40°; 60°; 80°. **3.** 80°. **В-ІІ. 1.** 80°; 50°; 50°.

2. 36°; 60°; 84°. **3.** 120°. **В-ІІІ. 1.** 45°; 105°; 30°. **2.** 57°; 79°. **3.** 10°; 70°.

В-IV. 1. 45°; 75°; 60°. **2.** 42°; 84°. **3.** 3°.

С-5-1. В-І. 2. 70°; 35°; 35°. **3.** 84 *см.* **В-ІІ. 2.** 38°; 71°; 71°. **3.** 18 *см.* **В-ІІІ. 1.** 120°. **2.** 126°.

3. 22 *см.* **В-IV. 1.** 50°. **2.** 43°, 30'. **3.** 26 *см.*

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

К-2. В-І. 1. 10 *см.* **В-ІІ. 1.** 6,5 *см.* **В-ІІІ. 1.** 10 *см.* **В-IV. 1.** 20 *см.*

К-3. В-І. 1. 51°; 129°. **2.** 10°; 120°. **3.** 60°; 30°. **В-ІІ. 1.** 141°; 39°. **2.** 30°; 70°. **3.** 80° та 10°.

В- ІІІ. 1. Ні. **2.** 20°; 60°; 100°. **3.** 20°; 135°; 25°. **В-IV. 1.** Ні. **2.** 20°; 100°; 60°.

3. 45°; 110°; 25°.

К-4. В- ІІІ. 1. 20°. **2.** 20°; 60°; 100°. **В-IV. 1.** 40°.

К-5. В- ІІІ. 1. 20°. **В-IV. 1.** 40°.

8 клас

- Чотирикутники
- Теорема Фалеса.
  Середня лінія трикутника.
  Середня лінія трапеції
- Теорема Піфагора
- Основні тригонометричні тотожності
- Декартові координати на площині
- Перетворення фігур.
  Рух
- Вектори

§1.ЧОТИРИКУТНИКИ

<table>
<tr><th colspan="2">Означення</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td colspan="2">
<u>Чотирикутником</u> називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх з'єднують. При цьому жодна з трьох даних точок не повинна лежати на одній прямій, а відрізки, які їх з'єднують, не повинні перетинатись.

Дані точки називаються <u>вершинами</u> чотирикутника, а відрізки, що їх з'єднують, — <u>сторонами</u> чотирикутника.

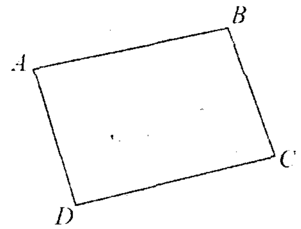
Чотирикутник позначають його вершинами. Вершини чотирикутника називаються <u>сусідніми</u>, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Несусідні вершини називаються <u>протилежними</u>.

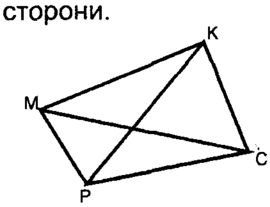
Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються <u>діагоналями</u>.

Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються <u>сусідніми</u>.

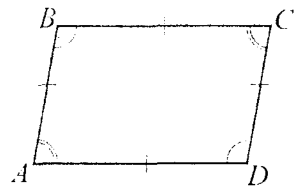
Сторони, які не мають спільних вершин, називаються <u>протилежними</u>.

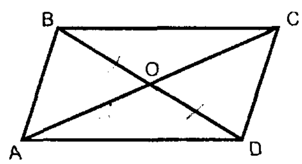
Сума довжин усіх сторін чотирикутника називається <u>периметром</u>.

<u>Паралелограм</u> — це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.
</td>
<td rowspan="3">


A, B, C, D – вершини;
AB, BC, CD, AD – сторони.


$MKCP$ — чотирикутник; вершини M и P – сусідні;
P і K – протилежні; відрізки MC, PK – діагоналі; сторони MK і KC – сусідні; MK і PC – протилежні.
$P = MK + KC + CP + PM$

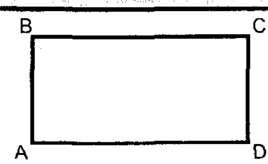
$ABCD$ – паралелограм $AB \parallel CD, BC \parallel AD$.


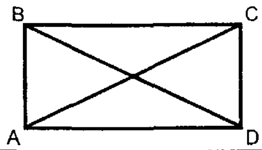


</td></tr>
<tr><th>Властивості</th><th>Ознаки</th></tr>
<tr><td>
1. Якщо $ABCD$ – паралелограм, то $AB = DC; AD = BC$, $\angle A = \angle C; \angle B = \angle D$.
2. Якщо $ABCD$ – паралелограм, AC і BD – діагоналі, O – точка їх перетину, то $AO = OC; BO = BD$.
</td><td>
1. Якщо $ABCD$ – чотирикутник і $BC \parallel AD; BC = AD$, то $ABCD$ – паралелограм.
2. Якщо $ABCD$ – чотирикутник і $AB = DC$; $AD = BC$, то $ABCD$ – паралелограм.
3. Якщо $ABCD$ – чотирикутник і $AO = OC$, $BO = BD$, то $ABCD$ – паралелограм.
</td></tr>
</table>

Прямокутник — це паралелограм, у якого всі кути прямі.

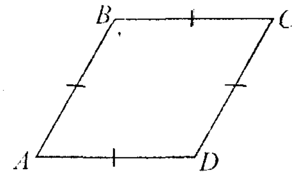
Властивості	Ознаки
1. Всі властивості паралелограма. 2. Якщо $ABCD$ – прямокутник, то $AC = BD$ (діагоналі прямокутника рівні).	1. Якщо $ABCD$ – паралелограм і $\angle A = 90^\circ$, то $ABCD$ – прямокутник. 2. Якщо $ABCD$ – паралелограм і $AC = BD$, то $ABCD$ – прямокутник.

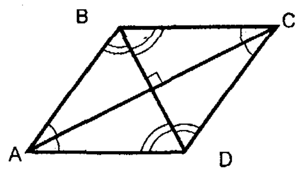




Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

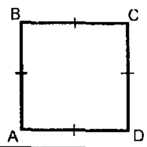
Властивості	Ознаки
1. Всі властивості паралелограма. 2. Якщо $ABCD$ – ромб, AC і BD – діагоналі, то: 1) $AC \perp BD$; 2) AC і BD – бісектриси кутів ромба.	Якщо $ABCD$ – чотирикутник і $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ – ромб.

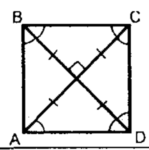




Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

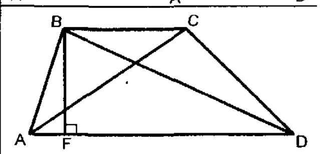
Квадрат – це ромб, у якого всі кути прямі. Квадрат має всі властивості прямокутника і ромба.





Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

Паралельні сторони називаються основами трапеції. Непаралельні – бічними сторонами.

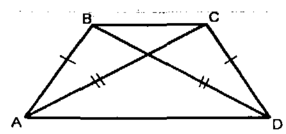


$ABCD$ – трапеція,
$BC \parallel AD$;
AD, BC – основи;
AB, CD – бічні сторони;
BF – висота.

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається рівнобічною.

Властивості рівнобічної трапеції

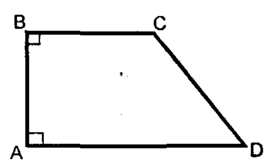
1. Кути при основі рівні.
2. Діагоналі рівні.



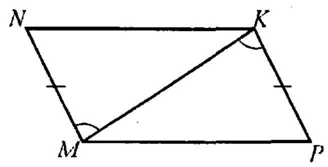
$\angle A = \angle D$, $AC = BD$.

Трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна основам, називається прямокутною.

$\angle B = \angle A = 90^o$



Задача 1. У чотирикутнику $MNKP$ протилежні сторони MN і KP рівні. Діагональ KM утворює з ними рівні кути. Довести, що $MNKP$ – паралелограм.

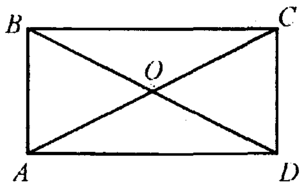


Доведення.

1) Оскільки $\angle NMK = \angle PKM$, а це внутрішні різносторонні кути при прямих MN, KP і січній MK, то $MN \parallel KP$.

2) Оскільки $MN \parallel KP$ і $MN = KP$ за умовою, то $MNKP$ – паралелограм (за ознакою паралелограма).

Задача 2. Менша сторона прямокутника дорівнює 12 $см$. Знайти довжини діагоналей, якщо вони перетинаються під кутом $60°$.



Дано: $ABCD$ – прямокутник, $AB = 12$ $см$, $\angle AOB = 60°$.
Знайти: AC, BD.

Розв'язання.

1) Оскільки діагоналі прямокутника рівні і точкою перетину діляться навпіл, то $AO = OB$.

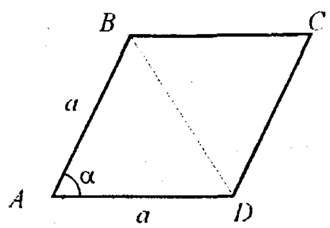
2) ΔAOB – рівнобедрений, $\angle AOB = 60°$, отже, ΔAOB – рівносторонній і $AO = BO = AB = 12$ $см$.

3) $AC = BD = 2AO = 2 \cdot 12 = 24$ ($см$).

Відповідь: 24 $см$.

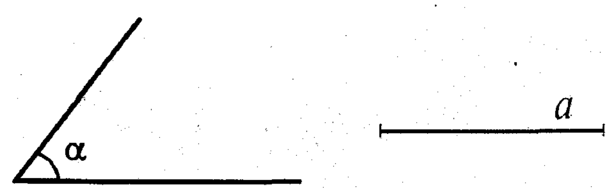
Задача 3. Побудувати ромб за стороною і прилеглим кутом.

Аналіз:



Очевидно, що достатньо побудувати ΔABD за двома сторонами і кутом між ними.

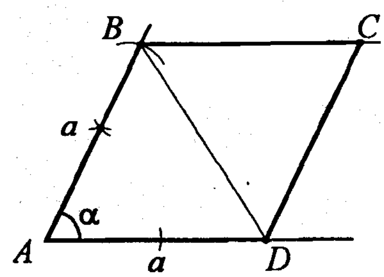
Дано:



Побудувати: ромб $ABCD$.

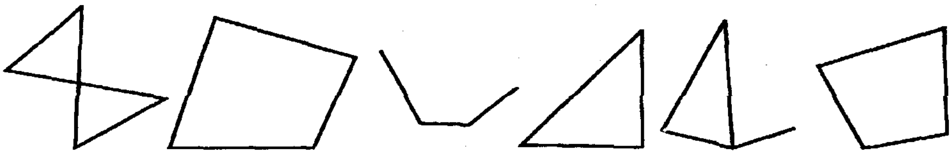
Побудова.

1. Будуємо ΔABD за двома сторонами $AD = AB = a$ і кутом між ними $\angle BAD = \alpha$.
2. Добудуємо цей трикутник до паралелограма: $BC \parallel AD, DC \parallel AB$. $ABCD$ – шуканий ромб, оскільки $BC = AD = AB = DC = a$.
3. Задача має єдиний розв'язок.



ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Які з даних фігур є чотирикутниками?



1 2 3 4 5 6

2. Дано чотирикутник $MNKP$.

1) Які вершини сусідні з вершиною P?

2) Які сторони сусідні із стороною KN?

3) Яка вершина є протилежною до вершини M?

4) Яка сторона є протилежною стороні PM?

3. В чотирикутнику $MNKP$ сторони PM і PK дорівнюють відповідно $7\ см$ і $9\ см$. Діагональ KM є бісектрисою кутів M і K. Знайти периметр даного чотирикутника.

4. У чотирикутнику $MNKP$ $MK = 16\ см$, $NP = 10\ см$, $MO = 8\ см$, $OP = 5\ см$. Визначити вид чотирикутника $MNKP$.

5. Дано: $\Delta ABD = \Delta CDB$. Довести, що $ABCD$ – паралелограм. (Рис. 1.).

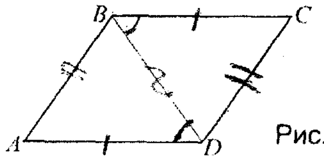


Рис. 1

6. Периметр паралелограма дорівнює $32\ см$. Одна з його сторін дорівнює $6\ см$. Знайти довжини інших сторін.

7. Периметр паралелограма дорівнює $46\ см$. Одна з його сторін на $3\ см$ довша, ніж інша. Знайти всі сторони паралелограма.

8. Один з кутів паралелограма дорівнює 50°. Знайти інші кути.

9. Довести, що $ABCD$ – паралелограм. (Рис. 2.).

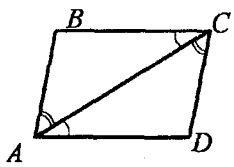


Рис. 2

10. Периметр паралелограма дорівнює $3{,}6\ см$. Одна з його сторін дорівнює $\frac{4}{5}\ см$. Знайти довжини інших сторін.

11. Периметр паралелограма дорівнює $5{,}6\ см$. Одна з його сторін у 3 рази більша, ніж інша. Знайти сторони паралелограма.

12. Знайти кути паралелограма, знаючи, що один з них у 3 рази більший, ніж другий.

13. Знайти кути паралелограма, якщо різниця двох із них дорівнює 80°.

14. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, поділяє його сторону навпіл. Знайти периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює $12\frac{2}{3}\ см$.

15. Знайти кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 110°.

16. Побудувати паралелограм за двома сторонами і кутом.

17. Точка K є внутрішньою точкою прямокутника $ABCD$, периметр якого дорівнює $26\ см$. Знайти суму відстаней від K до всіх сторін прямокутника.

18. Знайти довжини сторін прямокутника, якщо периметр його дорівнює $92\ см$, а сторони відносяться як $3:20$.

19. Побудувати прямокутник за двома сторонами.

20. $ABCD$ – прямокутник. Точки M, N, K, F – середини його сторін. Довести, що $MNKF$ – ромб.

21. $KLMN$ – ромб. Знайти $\angle KNM$. (Рис. 3).

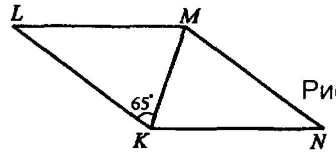


Рис. 3

22. Один із кутів ромба дорівнює $120°$, а діагональ, яка виходить з вершини цього кута, дорівнює $7\ см$. Знайти периметр ромба.

23. Побудувати ромб за двома діагоналями.

24. $AKFC$ – квадрат, $OB = 11\ мм$. Знайти периметр квадрата. (Рис. 4).

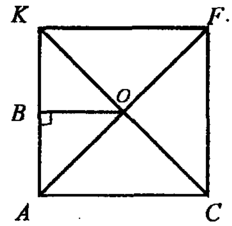


Рис. 4

25. В рівнобічній трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки, які дорівнюють $6\ см$ і $26\ см$. Знайти довжини основ трапеції.

26. В чотирикутнику $ABDF$ сторони AB і BD дорівнюють відповідно $6\ см$ і $8\ см$. Діагональ BF утворює з протилежними сторонами рівні кути. Знайти периметр даного чотирикутника.

27. Дано: $\Delta AOF = \Delta KOC$

Довести, що $AFKC$ – паралелограм. (Рис. 5).

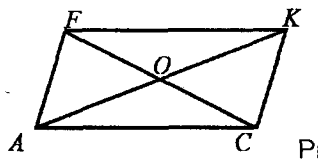


Рис. 5

28. Побудувати паралелограм за стороною і двома діагоналями.

29. В прямокутнику один з кутів, утворений діагоналями, дорівнює $120°$. Знайти меншу сторону прямокутника, якщо його діагональ дорівнює $22\ см$.

30. $ABCD$ – паралелограм. Довести, що $ABCD$ – ромб. (Рис. 6).

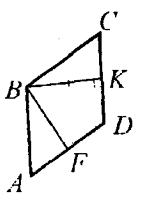


Рис. 6

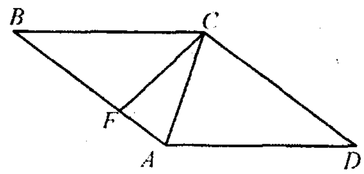


Рис. 7

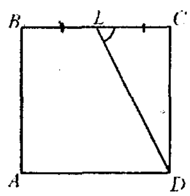


Рис. 8

31. $ABCD$ – ромб, $\angle ACF = 25°$. Знайти $\angle ADC$. (Рис. 7).

32. Побудувати ромб за висотою і однією з діагоналей.

33. $ABCD$ – квадрат, $\angle CLD = 60°$, $DL = 1,7\ см$. Знайти периметр квадрата. (Рис. 8).

34. В рівнобічній трапеції основи дорівнюють $4\ см$ і $9\ см$, тупий кут дорівнює $135°$. Чому дорівнює довжина висоти?

35. Бісектриса кута прямокутника, периметр якого дорівнює $182\ мм$, поділяє його сторону в точці перетину у відношенні $3:2$. Знайти довжини сторін прямокутника (два випадки).

36. Побудувати прямокутник за даною діагоналлю і куту між діагоналями.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-1-1

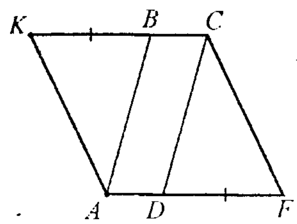
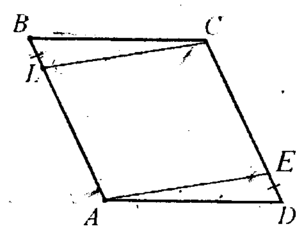
Тема. Чотирикутники

В – І	6 балів	В – ІІ
1. Периметр прямокутника дорівнює $100\ см$. Одна з його сторін на $6\ см$ менша, ніж інша. Визначити всі сторони прямокутника.		1. Периметр паралелограма дорівнює $98\ см$. Одна з його сторін на $7\ см$ більша, ніж інша. Визначити всі сторони паралелограма.
2. $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 126^\circ$. Знайти кути ΔABC.		2. $ABCD$ – квадрат. O – точка перетину діагоналей. Знайти кути ΔCOD.

В – ІІІ	11 балів	В – IV
1. Периметр прямокутника дорівнює $1,08\ дм$. Одна з його сторін в $1,7$ раза більша, ніж інша. Знайти сторони прямокутника.		1. Периметр паралелограма дорівнює $1\ дм$. Одна з його сторін в $1,5$ раза більша, ніж інша. Знайти сторони паралелограма.
2. Визначити вид чотирикутника $MKNO$, де OM і ON – два взаємно перпендикулярних радіуси кола з центром O. K – точка перетину дотичних, проведених через точки M і N.		2. Визначити вид чотирикутника $MNKP$, якщо MK і NP – діаметри одного кола.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-1

Тема. Чотирикутники

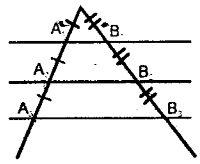
В – І	6 балів	В – ІІ
1. В рівнобічній трапеції діагональ поділяє гострий кут навпіл, периметр її дорівнює $54\ дм$, більша її основа дорівнює $18\ дм$. Обчислити меншу основу трапеції.		1. В рівнобічній трапеції діагональ поділяє гострий кут навпіл. Знайти периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють $12\ см$ і $20\ см$.
2. $AKCF$ – паралелограм. Довести, що $ABCD$ – паралелограм. 		2. $ALCE$ – паралелограм. Довести, що $ABCD$ – паралелограм. 

В – ІІІ	11 балів	В – IV
1. В рівнобічній трапеції один із кутів дорівнює 60°, бічна сторона дорівнює $24\ см$, а сума основ дорівнює $43\ см$. Знайти основи трапеції.		1. Знайти периметр рівнобічної трапеції, якщо відомо, що її тупий кут дорівнює 120°, а основи дорівнюють $15\ см$ і $49\ см$.
2. Довести, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма, паралельні.		2. Дано прямокутник $ABCD$. До його діагоналі BD проведені перпендикуляри AM і CN. Точки M і N з'єднані відповідно з точками C і A. Довести, що чотирикутник $AMCN$ – паралелограм.

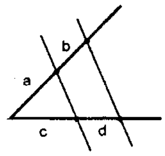
§2. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на іншій його стороні.

Примітка. В умові теореми Фалеса замість сторін кута можна взяти дві довільні прямі.



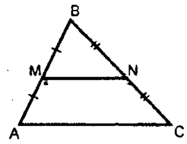
Теорема про пропорційні відрізки.
Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.



$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Теорема. Середня лінія трикутника, який сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.



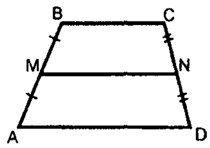
MN – середня лінія

1. $MN \parallel AC$;

2. $MN=\frac{1}{2}AC$.

Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції.

Теорема. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.



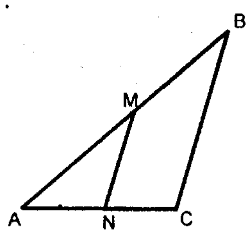
MN – середня лінія

1. $MN \parallel AD. MN \parallel BC$

2. $MN=\frac{AD+BC}{2}$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1.



Дано: $\angle ANM=\angle ACB=116^\circ$; $AN=NC=9$ *см*; $AM=14$ *см*.

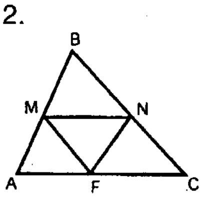
Знайти: AB.

Розв'язання.

1. Оскільки $\angle ANM=\angle ACB=116^\circ$, а це відповідні кути при прямих NM, CB і січній AC, отже, $NM \parallel CB$.
2. Оскільки $NM \parallel CB$ і $AN=NC=9$ *см*, то за теоремою Фалеса $AM=MB$, отже, $MB=14$ *см*.
3. $AB=AM+MB=28$ (*см*).

Відповідь: 28 *см*.

2.



Дано: ΔABC; $AB=7$ *см*; $BC=10$ *см*; $AC=9$ *см*; MN, MF, NF — середні лінії. Знайти: $P_{\Delta MNF}$.

Розв'язання.

1. $P_{\Delta MNF}=MN+NF+MF$.

2. Оскільки MN – середня лінія трикутника ABC, то $MN=\frac{1}{2}AC$ (за властивістю середньої лінії трикутника). Аналогічно $NF=\frac{1}{2}AB$, $MF=\frac{1}{2}BC$.

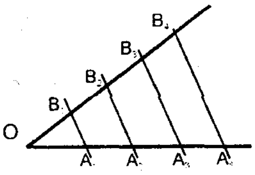
3. Маємо: $P_{\Delta MNF}=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC+AB+BC)$.

$P_{\Delta MNF}=\frac{1}{2}(9+7+10)=13(см)$.

Відповідь: 13 *см*.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

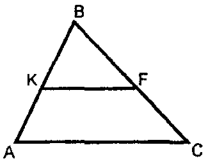
1.



Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$; $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$; $OB_4 = 32$ *см*.

Знайти: $OB_1; OB_2; OB_3$.

2.



Дано: $KF \| AC$; $BK = 3$ *см*, $AK = 2$ *см*, $BF = 5$ *см*.

Знайти: FC.

3. ST і SO – середні лінії трикутника ABC. Визначити, чи буде відрізок OT середньою лінією даного трикутника.

4. В трикутнику ABC позначені точки K і F, які є серединами сторін AB і BC відповідно. $AK = 4$ *см*, $AC = 10$ *см*, $CF = 5$ *см*. Знайти периметр трикутника BKF.

5. Периметр прямокутника дорівнює 36 *см*. Одна сторона більше другої на 2 *см*. Знайти відстань від точки перетину діагоналей до сторін.

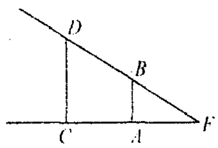
6. Довести, що середини сторін рівнобічної трапеції є вершинами ромба.

7. Знайти довжину середньої лінії трапеції, у якої основи відносяться як $3:7$, а різниця їх дорівнює 48 *см*.

8. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 28 *см*, висота – 9 *см*, гострий кут дорівнює 45°. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

9. Поділити даний відрізок на 7 рівних частин.

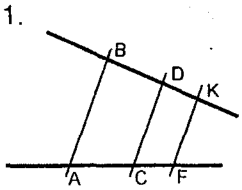
10.



Дано: $\angle DCF = \angle BAF = 90^\circ$; $FB = BD = 9$ *см*; $AC = 5$ *см*.

Знайти: AF.

11.



Дано: $AB \| CD \| FK$; $CF = 5$ *см*, $DK = 6$ *см*, $BD = 15$ *см*.

Знайти: AC.

12. В трикутнику DQR позначені точки A, B, C, які є серединами сторін DQ, QR і DR відповідно. Довести, що $ABCD$ – паралелограм.

13. В рівносторонньому трикутнику ABC позначені точки P, F, R, які є серединами сторін AB, BC і AC відповідно. Знайти периметр паралелограма $APFR$, якщо периметр трикутника PBF дорівнює 81 *см*.

14. Периметр прямокутника дорівнює 72 *см*. Відстань від точки перетину діагоналей до однієї сторони прямокутника більша, ніж до другої сторони, на 6 *см*. Знайти довжини сторін прямокутника.

15. В рівнобічній трапеції більша основа дорівнює $7{,}4$ *см*, бічна сторона $2{,}4$ *см*, тупий кут дорівнює 120°. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

16. Поділити даний відрізок на 13 рівних частин.

17. Довести, що відрізок, який з'єднує середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює половині їх різниці.

18. Одна основа трапеції складає 30% другої і менша за неї на $4{,}2$ *см*. Знайти довжину середньої лінії трапеції.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-2-1

Тема. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника. Середня лінія трапеції

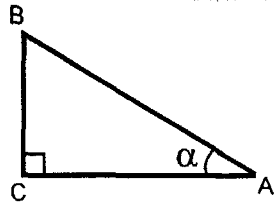
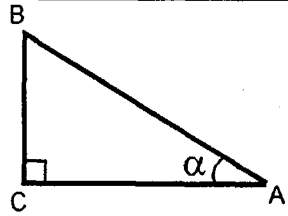
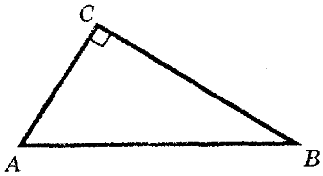
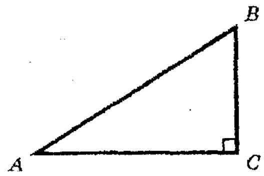
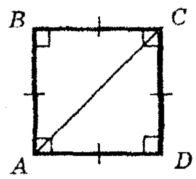
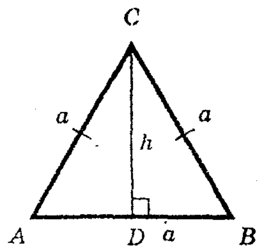
<table>
<tr><th>В – I</th><th>6 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Основа трикутника дорівнює $12{,}5$ см. Знайти середню лінію, паралельну цій основі.</td><td>1. Середня лінія трикутника дорівнює $6{,}7$ см. Знайти основу трикутника, паралельну середній лінії.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. В трапеції $ABCD\,(AD \parallel BC)$ сторони дорівнюють: $AB = 10$ см, $BC = 13$ см, $CD = 15$ см, $AD = 21$ см. MN — середня лінія трапеції. Знайти сторони трапеції $AMND$.</td><td>2. В трапеції $ABCD\,(AD \parallel BC)$ сторони дорівнюють: $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см, $AD = 23$ см. MF — середня лінія трапеції. Знайти сторони трапеції $MBCF$.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Діагоналі паралелограма дорівнюють $8{,}4$ см і $6{,}2$ см. Середини його сторін послідовно з'єднані відрізками. Знайти периметр одержаного чотирикутника.</td><td>1. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 18 см. Знайти довжини відрізків середньої линії трапеції, на які вона поділяється однією з діагоналей трапеції.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Периметр трапеції дорівнює 98 см; бічні сторони дорівнюють 25 см і 23 см. Знайти довжину середньої лінії трапеції.</td><td>2. Одна з основ трапеції більше другої на 5 дм, а середня лінія дорівнює 50 дм. Обчислити довжину основ трапеції.</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-2

Тема. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника. Середня лінія трапеції

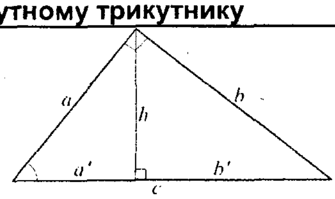
<table>
<tr><th>В – I</th><th>6 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В трикутнику сторони дорівнюють 11 см, 12 см, 13 см, а вершини його – середини сторін даного трикутника. Знайти периметр більшого трикутника.</td><td>1. В трикутнику сторони дорівнюють 9 м, 10 м, 11 м. Знайти периметр трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Одна з основ трапеції дорівнює 23 см, а середня лінія – 32 см. Знайти довжину другої основи трапеції.</td><td>2. У рівнобічній трапеції $ABCD$ висота BK відтинає відрізок AK, дорівнює 5 см. Менша основа трапеції $BC = 9$ см. Знайти довжину середньої лінії трапеції.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>11 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В трапеції $ABCD$ з основами $AD = 22$ см і $BC = 16$ см проведена середня лінія MN, яка перетинає діагональ AC в точці L. Чому дорівнюють відрізок ML і середня лінія MN ?</td><td>1. Діагоналі трапеції поділяють її середню лінію на частини, кожна з яких дорівнює 7 см. Визначити основи трапеції.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Середня лінія та кожна з бічних сторін трапеції рівні по 14 см, кут при меншій основі 120°. Знайти довжини основ трапеції.</td><td>2. Основа трапеції дорівнює 38 дм, а середня лінія – 32 дм. Кути при основі трапеції рівні і поділяються діагоналями навпіл. Знайти периметр трапеції.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Поділити даний відрізок на 9 рівних частин.</td><td>3. Поділити даний відрізок на 11 рівних частин.</td></tr>
</table>

§3. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

<u>Косинусом гострого кута</u> α в прямокутному трикутнику називається відношення катета, прилеглого до кута α, до гіпотенузи.	 $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$
<u>Синусом кута</u> α називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.	$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$
<u>Тангенсом кута</u> α називається відношення протилежного катета до прилеглого (а). <u>Котангенсом кута</u> α називається відношення прилеглого катета до протилежного катета (б).	а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$.
Для будь-якого гострого кута α: $\cos\alpha < 1$; $\sin\alpha < 1$.	 $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $AC < AB$; $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $BC < AB$
У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.	 $AB^2 = AC^2 + BC^2$
У прямокутному трикутнику будь-який з катетів менший за гіпотенузу.	 $AC < AB$, $BC < AB$
Діагональ квадрата із стороною a дорівнює $a\sqrt{2}$.	 $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$
Висота h рівностороннього трикутника із стороною a дорівнює $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Пропорційність відрізків в прямокутному трикутнику

1. Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційнім між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.
2. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.

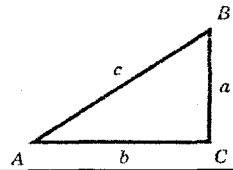


$a^2 = c \cdot a'$, $b^2 = c \cdot b'$;

$h^2 = a' \cdot b'$, де b', a' – проекції на гіпотенузу катетів a і b відповідно.

Теорема, обернена теоремі Піфагора

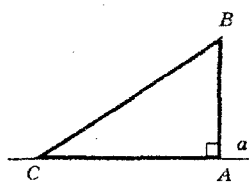
Якщо трикутник має сторони a, b, c і $a^2 + b^2 = c^2$, то кут, що лежить проти сторони c, є прямим.



Якщо до прямої з однієї точки проведені перпендикуляр і похилі, то:

1) будь-яка похила більша від перпендикуляра;

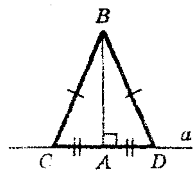
1)



$BC > BA$

2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: рівним проекціям відповідають рівні похилі;

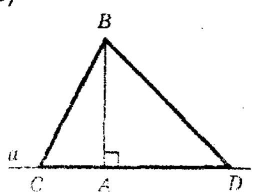
2)



$AC = AD$, тому що $BC = BD$

3) із двох похилих більше та, у якої проекція більше, і навпаки: більшій проекції відповідає більша похила (наслідок з теореми Піфагора).

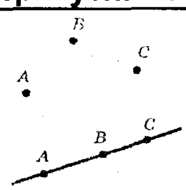
3)



$BD > BC$, $AD > AC$

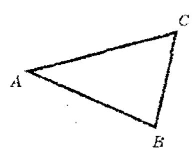
Нерівність трикутника

Які б не були три точки, відстань між будь-якими двома з цих точок не більша від суми відстаней від них до третьої точки.



$AB \le AC + BC$

У будь-якому трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін.

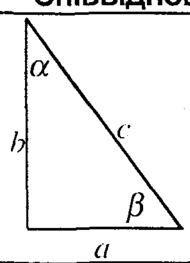


$BC < AB + AC$

$AC < AB + BC$

$BC < AB + AC$

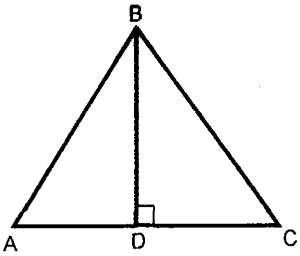
Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника



$c^2 = a^2 + b^2$	$a^2 = c^2 - b^2$	$b^2 = c^2 - a^2$
$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$;	$a = c \cdot \sin\alpha$	$b = c \cdot \sin\beta$
$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$; $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.	$a = c \cdot \cos\beta$	$b = c \cdot \cos\alpha$
	$a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$	$b = a \cdot \mathrm{tg}\,\beta$

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА
Теорема Піфагора

Висота рівнобедреного трикутника дорівнює $20\ см$, а його основа – $30\ см$. Знайти бічну сторону трикутника.



Дано: $\Delta ABC,\ AB = BC.\ BD \perp AC,\ BD = 20\ см,\ AC = 30\ см.$
Знайти: AB, BC.

Розв'язання.

1) Оскільки ΔABC рівнобедрений $(AB = BC)$, то висота BD є його медіаною, отже: $AD = DC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}30 = 15(см)$.

2) В $\Delta\ BDC, \angle D = 90°$, отже, за теоремою Піфагора маємо:

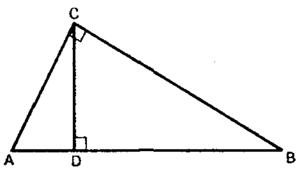
$BC^2 = BD^2 + DC^2$; $BC^2 = 20^2 + 15^2,\ BC^2 = 625,$

$BC = 25\ (BC > 0),\ BC = AB = 25см.$

Або, оскільки $BD = 20\ см,\ DC = 15\ см$, то ΔBDC – єгипетський з $k = 5$, отже, $BC = 5 \cdot 5 = 25(см)$. $BC = AB = 25\ см$.

Відповідь: $25\ см$.

Дано: У $\Delta ABC\ \ \angle C = 90°,\ CD \perp AB,\ AD = 9\ см,\ DB = 16\ см.$
Знайти: $AC, BC, CD.$



Розв'язання.

1) Оскільки ΔACB прямокутний $(\angle C = 90°)$, а CD – його висота, проведена до гіпотенузи AB, то $CD^2 = AD \cdot DB$;

$CD^2 = 9 \cdot 16;$

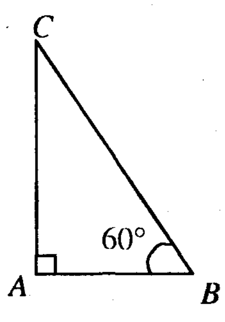
$CD = \sqrt{9 \cdot 16}\ (CD > 0);\ \ CD = 12см$

2) В $\Delta ADC\ \ \angle D = 90°,\ AD = 9\ см,\ DC = 12\ см$, отже, цей трикутник – єгипетський з $k = 3$. Маємо: $AC = 5 \cdot 3 = 15(см)$.

3) Аналогічно: ΔCDB – єгипетський з $k = 4$, отже, $BC = 5 \cdot 4 = 20(см)$.

Відповідь: $15\ см,\ 20\ см,\ 12\ см.$

В трикутнику ABC дано: $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $AC = 9см$. Знайти сторону AB.



Розв'язання.

За умовою задачі $\angle A = 90°$, тобто AC — катет, протилежний куту B. Потрібно знайти катет, прилеглий куту B. Відношення протилежного катета до прилеглого є тангенсом кута, тобто

$\frac{AC}{AB} = \mathrm{tg}\, B$;

звідси $AB = AC : \mathrm{tg}\, B = AC : \mathrm{tg}\, 60° = 9 \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}\ (см)$.

Відповідь: $9\sqrt{3}\ (см)$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. В прямокутному трикутнику катети дорівнюють 12 *см* і 5 *см*. Знайти гіпотенузу.

2. Знайти периметр прямокутника, одна сторона якого дорівнює 12 *см*, а діагональ 15 *см*.

3. Діагоналі ромба 24 *см* та 70 *см*. Обчислити периметр ромба.

4. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 18 *см* і 42 *см*. Бічна сторона 20 *см*. Обчислити висоту трапеції і середню лінію трапеції.

5. Середини сторін квадрата послідовно з'єднані відрізками. Обчислити сторони утвореного чотирикутника, якщо сторона квадрата 12 *см*.

6. Катети прямокутного трикутника відносяться як $1:5$. Гіпотенуза дорівнює $2\sqrt{26}$ *м*. Знайти катети.

7. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 *см* і 20 *см*. Знайти проекції цих катетів на гіпотенузу.

8. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 2 *см* і 18 *см*. Знайти катети.

9. У прямокутному трикутнику гіпотенуза і катет відповідно дорівнюють $2m$ і m. Знайти другий катет.

10. Периметр прямокутника 28 *см*. Одна сторона його 6 *см*. Знайти діагональ.

11. Визначити діагоналі ромба, якщо вони відносяться як $3:4$, а периметр дорівнює 1 *м*.

12. У рівнобічній трапеції бічна сторона 17 *см*, висота 15 *см*, а середня лінія 31 *см*. Обчислити основи трапеції.

13. Катети прямокутного трикутника 20 *см* та 15 *см*. Обчислити медіану, проведену до гіпотенузи.

14. До кола з радіусом 15 *см* проведена дотична, на якій узята точка A, розміщена на відстані 8 *см* від точки дотику. Знайти відстань від точки A до центра кола.

15. Із точки M до прямої a проведені перпендикуляр MK і похилі $MA = 37 см$ і $MB = 13 см$. Знайти відстань AB, якщо $MK = 12 см$. Скільки розв'язків має дана задача?

16. Знайти бічні сторони трапеції $ABCD$, якщо її висота дорівнює $4 см$ і кути при основі складають 30° і 45°.

17. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайти основу цього трикутника, якщо його бічна сторона $14 см$.

18. З однієї точки до даної прямої проведені перпендикуляр і дві похилі. Знайти довжину перпендикуляра, якщо довжини похилих 41 *см* і 50 *см*, а їхні проекції на дану пряму відносяться як $3:10$.

19. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 *см*, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 5 *см*. Знайти другий катет.

20. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 12 *см* і 27 *см*. Знайти катети.

21. Знайти середню лінію трапеції $ABCD$, якщо її гострий кут дорівнює 60°, а бічні сторони рівні верхній основі і дорівнюють $10 см$.

22. Обчислити синус і косинус кута A трапеції $ABCD$, якщо відомо, що $AB = 4 см$, $BC = 1 см$, $CD = 4 см$, $AD = 3 см$.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-3-1
Тема. Теорема Піфагора

<table>
<tr><th>В – I</th><th>6 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В рівнобічній трапеції основи дорівнюють $11\ см$ та $23\ см$, а бічна сторона – $10\ см$. Знайти висоту трапеції.</td><td>1. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють $12\ см$ та $18\ см$, а бічна сторона $5\ см$. Знайти висоту трапеції.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Знайти діагоналі рівнобічної трапеції, якщо її менша основа дорівнює $7\ см$, бічна сторона $5\sqrt{2}\ см$, а один з кутів трапеції дорівнює $135°$.</td><td>1. Знайти діагоналі рівнобічної трапеції, якщо її менша основа дорівнює $6\ см$, висота трапеції дорівнює $5\sqrt{3}\ см$, а один з кутів трапеції дорівнює $60°$.</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-3
Тема. Теорема Піфагора

<table>
<tr><th>В – I</th><th>6 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В паралелограмі $ABCD$ висота BK поділяє сторону AD на відрізки AK і KD. Знайти сторони паралелограма, якщо $BK = 8\ см$, $AK = 15\ см$, $BD = 10\ см$.</td><td>1. В трапеції $MOPK$ проведені висоти OB і PA, які поділяють більшу основу на відрізки MB, BA і AK. Знайти меншу основу та бічні сторони трапеції, якщо $MB = 8\ см$, $BA = 9\ см$, $AK = 12\ см$ і $AP = 6\ см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Висота прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$, проведена до гіпотенузи, дорівнює $8\ см$. Проекція катета AC на гіпотенузу дорівнює $6\ см$. Обчислити проекцію катета BC на гіпотенузу.</td><td>2. Гіпотенуза прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ дорівнює $10\ см$. Один з катетів дорівнює $6\ см$. Знайти проекцію цього катета на гіпотенузу.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>12 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Знайти висоту прямокутної трапеції $ABCD$, якщо її гострий кут D дорівнює $30°$, діагональ AC перпендикулярна бічній стороні CD і основа AD дорівнює $24\ см$.</td><td>1. Знайти висоту прямокутної трапеції $ABCD$, якщо її тупий кут дорівнює $150°$, діагональ AC перпендикулярна бічній стороні CD і основа AD дорівнює $32\ см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. В прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $36\ см$ і поділяє її на відрізки у відношенні $9:16$. Обчислити периметр цього трикутника.</td><td>2. В прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки у відношенні $16:9$. Менший катет трикутника дорівнює $45\ см$. Обчислити цю висоту трикутника.</td></tr>
</table>

§4. ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

Основні тригонометричні тотожності

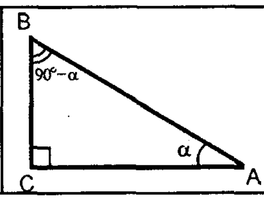
В прямокутному трикутнику з гострим кутом α правдиві тотожності:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Для будь-якого гострого кута α:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

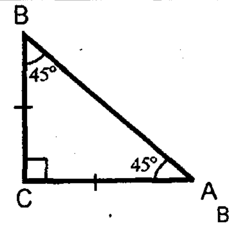


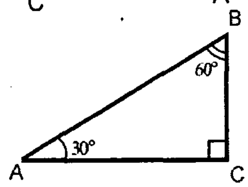
$\sin B = \cos A$,

$\cos B = \sin A$

Значення синуса, косинуса і тангенса деяких кутів

Кути / Функції	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



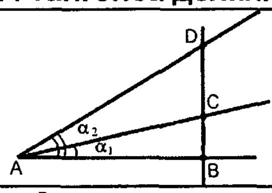


Зміни синуса, косинуса і тангенса деяких кутів

При зростанні гострого кута α $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ зростає, а $\cos\alpha$ спадає.

$\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$; $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$;

$\operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_1$

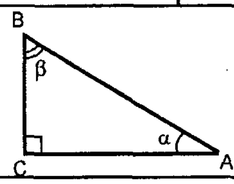


$\angle DAB = \alpha_2$,

$\angle CAB = \alpha_1$,

$\alpha_1 < \alpha_2$

В прямокутному трикутнику супротив більшого гострого кута лежить більший катет, і навпаки: супротив більшого катета лежить більший гострий кут.



$\alpha < \beta$, $BC < AC$

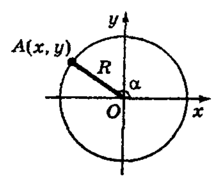
Визначення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180°.

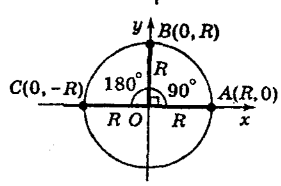
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0°	0	1	0
90°	1	0	—
180°	0	−1	0

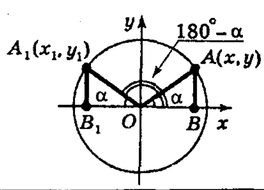
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ для будь-якого кута α от 0° до 180°, крім $\alpha = 90^\circ$.

Для будь-якого кута α $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Для кута $\alpha \neq 90^\circ$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.







УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Який із кутів більше, якщо відомо, що $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{4}{7}$; $\cos\gamma=\frac{3}{5}$.

Розв'язання.

Порівняємо значення косинусів, тобто порівняємо числа $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{5}$.

Зведемо дроби до спільного знаменника 105; $\frac{2}{3}=\frac{70}{105}$; $\frac{4}{7}=\frac{60}{105}$; $\frac{3}{5}=\frac{63}{105}$,

тобто, $\frac{60}{105}<\frac{63}{105}<\frac{70}{105}$, отже $\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$.

Оскільки із зростанням гострого кута значення косинуса спадає, то більшому значенню косинуса відповідає менший кут, дістанемо: $\cos\beta<\cos\gamma<\cos\alpha$, тобто, $\beta>\gamma>\alpha$.

Відповідь: β.

2. Спростити вираз $\left(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha$.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення в дужках:

1) $\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=1$.

Відповідь: 1.

3. Спростити вираз $\sin^3\alpha-\sin^3\alpha\cos^2\alpha$.

Розв'язання.

Винесемо за скобки спільний множник:

$\sin^3\alpha-\sin^3\alpha\cos^2\alpha=\sin^3\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)=\sin^3\alpha\cdot\sin\alpha=\sin^4\alpha$.

Відповідь: $\sin^4\alpha$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Обчислити значення виразу.

а) $5\sin30^\circ+2\cos60^\circ-6\operatorname{tg}45^\circ$;

б) $\sin45^\circ-2\cos45^\circ+2\operatorname{tg}45^\circ$;

в) $2\operatorname{tg}60^\circ+4\cos45^\circ-\sin^2 45^\circ$.

2. Порівняти значення виразів.

а) $\sin20^\circ$ і $\sin40^\circ$;

б) $\cos20^\circ$ і $\cos40^\circ$;

в) $\operatorname{tg}20^\circ$ і $\operatorname{tg}40^\circ$.

3. Розмістити в порядку зростання.

а) $\sin15^\circ;\sin78^\circ;\sin5^\circ$;

б) $\cos11^\circ;\cos75^\circ;\cos33^\circ$;

в) $\operatorname{tg}21^\circ;\operatorname{tg}60^\circ;\operatorname{tg}43^\circ$.

4. Спростити вираз.

а) $\operatorname{tg}\beta\left(1-\sin^2\alpha\right)$; б) $\left(1-\cos^2\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha$; г) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$; д) $\frac{\cos^2\alpha-1}{1-\sin^2\alpha}$.

5. Спростити вираз.

а) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)$; б) $3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$;

в) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2-\sin^2\alpha+1$; г) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-1$.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-1

Тема. Основні тригонометричні тотожності

В – I	9 балів / В – II
1. Порівняти величини. а) $\cos 13^\circ$ і $\cos 14^\circ$; б) $\sin 47^\circ$ і $\sin 37^\circ$; в) $\operatorname{tg} 80^\circ$ і $\operatorname{tg} 85^\circ$.	1. Порівняти величини. а) $\sin 13^\circ$ і $\sin 14^\circ$; б) $\cos 47^\circ$ і $\cos 37^\circ$; в) $\operatorname{tg} 15^\circ$ і $\operatorname{tg} 65^\circ$.
2. Знайти $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$, якщо $0 < \alpha < 90^\circ$.	2. Знайти $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0{,}6$, якщо $0 < \alpha < 90^\circ$.
3. Спростити вираз. $1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.	3. Спростити вираз. $\cos^2\alpha - 1 + \sin^2\alpha$.

В – III	12 балів / В – IV
1. Порівняти. а) $\cos 17^\circ$; $\cos 38^\circ$; $\cos 20^\circ$; б) $\sin 87^\circ$; $\sin 13^\circ$; $\sin 29^\circ$; в) $\operatorname{tg} 89^\circ$; $\operatorname{tg} 87^\circ$; $\operatorname{tg} 88^\circ$.	1. Порівняти. а) $\sin 37^\circ$; $\sin 14^\circ$; $\sin 36^\circ$; б) $\cos 49^\circ$; $\cos 41^\circ$; $\cos 45^\circ$; в) $\operatorname{tg} 63^\circ$; $\operatorname{tg} 57^\circ$; $\operatorname{tg} 68^\circ$.
2. Обчислити $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $0^\circ < \alpha < 180^\circ$	2. Обчислити $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$; $0^\circ < \alpha < 180^\circ$
3. Спростити вираз. $2\cos^2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha$	3. Спростити вираз. $1 - 2\sin^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha$

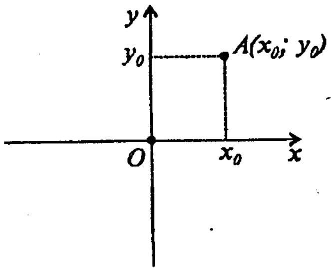
КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-4

Тема. Основні тригонометричні тотожності

В – I	9 балів / В – II
1. Обчислити. а) $\sin 30^\circ$; б) $\cos 60^\circ$; в) $\operatorname{tg} 45^\circ$; г) $\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ$.	1. Обчислити. а) $\cos 30^\circ$; б) $\sin 60^\circ$; в) $\operatorname{tg} 30^\circ$; г) $\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 30^\circ + 2\cos 60^\circ$.
2. За даним значенням $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ знайти значення $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.	2. За даним значенням $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ знайти значення $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
3. Спростити вираз. а) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; б) $\operatorname{tg}^2\beta \cdot \cos^2\beta - 1$.	3. Спростити вираз. а) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1$; б) $\operatorname{ctg}^2\beta \cdot \sin^2\beta - 1$.

В – III	12 балів / В – IV
1. Обчислити. а) $\sin 45^\circ - \sin 60^\circ$; б) $\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$; в) $(1 - \sin 30^\circ)(1 + \sin 30^\circ) + (1 + \cos 30^\circ)(1 - \cos 30^\circ)$.	1. Обчислити. а) $\cos 45^\circ - \cos 60^\circ$; б) $\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$; в) $(1 - \cos 45^\circ)(1 + \cos 45^\circ) + (1 + \sin 45^\circ)(1 - \sin 45^\circ)$.
2. За даним значенням $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ знайти значення $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.	2. За даним значенням $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ знайти значення $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
3. Спростити. а) $(1 - \cos\alpha)^2 + (1 + \cos\alpha)^2$; б) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - (\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha)^2$.	3. Спростити. а) $(1 - \sin\alpha)^2 + (1 + \sin\alpha)^2$; б) $\frac{\cos^5\alpha - \sin^4\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \cos\alpha$.

§5. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ



Осі координат:
вісь x – вісь абсцис,
вісь y – вісь ординат.

Точка O – початок координат.

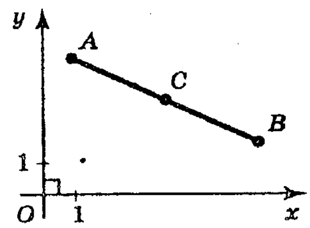
Будь-якій точці площини відповідають два числа: абсциса x_0 і ордината y_0. Ці числа називаються декартовими координатами даної точки.

Координати середини відрізка

Координати середини відрізка дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців

$A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $C(x; y)$ – середина AB.

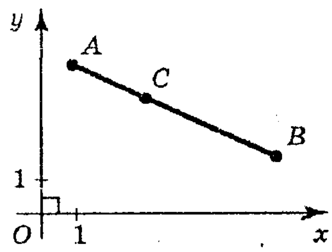
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Координати точки, яка поділяє відрізок у заданому відношенні

Якщо точки A і B мають координати $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то координати точки C, яка поділяє відрізок AB у відношенні $\frac{AC}{CB} = \lambda \ (\lambda > 0)$, обчислюються за формулами:

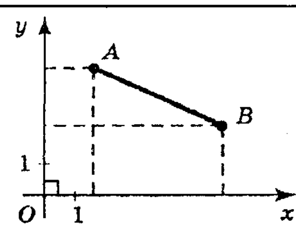
$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$



Відстань між точками

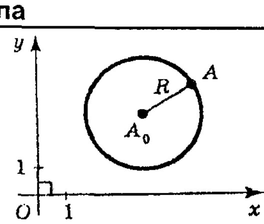
Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць однойменних координат $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$,

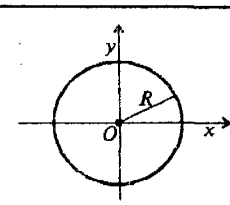
$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Рівняння кола

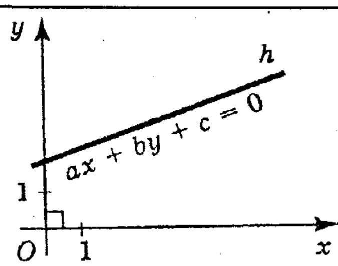
Рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ є рівнянням кола з центром у точці $A_0(a;b)$ і радіусом R. Якщо центром є початок координат, то рівняння кола має вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

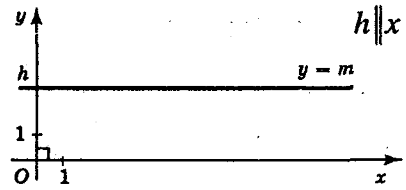
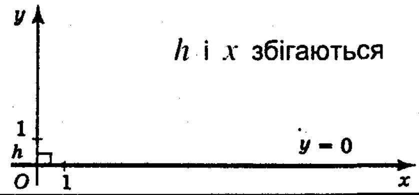
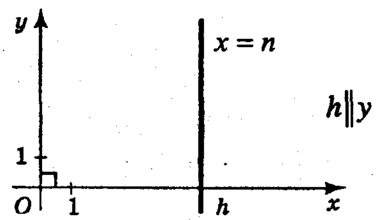
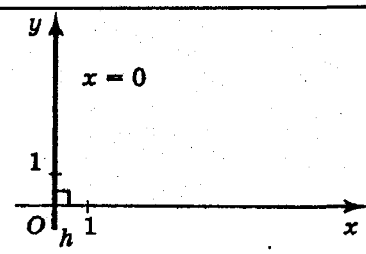
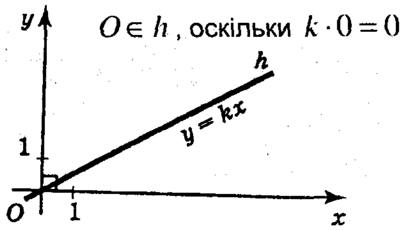




Рівняння прямої

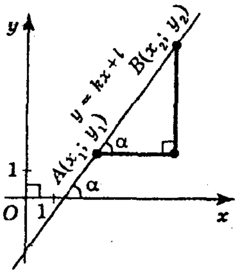
Будь-яка пряма в декартових координатах x, y має рівняння виду $ax + by + c = 0$, де a, b, c – деякі числа.



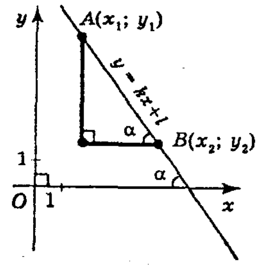
<table>
<tr><th colspan="5">Розміщення прямої відносно системи координат</th></tr>
<tr><th colspan="3">Коефіцієнти</th><th>Рівняння прямої</th><th>Розміщення прямої в системі координат</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1.</td><td rowspan="2">$a=0$
$b\neq 0$</td><td>а) $c\neq 0$</td><td>$y=-\frac{c}{b}(y=m)$</td><td>
пряма h паралельна осі Ox.</td></tr>
<tr><td>б) $c=0$
$by=0$</td><td>$(y=0)$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">$b=0$
$a\neq 0$</td><td>а) $c\neq 0$</td><td>$x=-\frac{c}{a}\ (x=n)$</td><td>
пряма h паралельна осі Oy.</td></tr>
<tr><td>б) $c=0$</td><td>$ax=0\ (x=0)$</td><td>
h і y збігаються</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="2">$c=0$
$a\neq 0$
$b\neq 0$</td><td>$ax+by=0$
$(y=kx)$</td><td>
$y=kx$ – пряма пропорційність</td></tr>
</table>

Кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої

Якщо точки A і B мають координати $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то кутовий коефіцієнт прямої AB $(y = kx + l)$ обчислюється за формулою $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і дорівнює тангенсу гострого кута, який утворює пряма AB з віссю x ($k = \text{tg}\,\alpha$ або $k = \text{-tg}\,\alpha$).



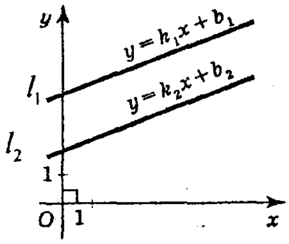
$k = \text{tg}\,\alpha$



$k = \text{-tg}\,\alpha$

Умова паралельності прямих

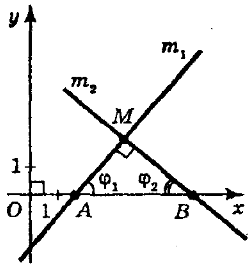
Прямі $l_1\ (y = k_1x + b)$ і $l_2\ (y = k_2x + b_2)$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.



$l_1 \parallel l_2$

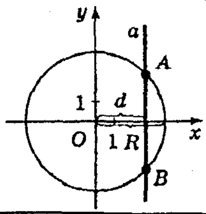
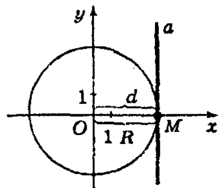
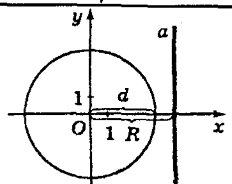
Умова перпендикулярності прямих

Прямі $m_1\ (y = k_1x + b_1)$ і $m_2\ (y = k_2 + b_2)$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.



$m_1 \perp m_2$

Перетин прямої з колом

Співвідношення між d і R: d – відстань від прямої до центра кола. R – радіус кола		Розв'язки системи: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases}$	Взаємне розміщення прямої і кола	
1.	$R > d$	$\left(d; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$, $\left(d; -\sqrt{R^2 - d^2}\right)$,		Пряма перетинає коло в двох точках: $A\ \left(d; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$ і $B\ \left(d; -\sqrt{R^2 - d^2}\right)$.
2.	$R = d$	$(d; 0)$		Пряма дотикається до кола в точці $M\ (d; 0)$.
3.	$R < d$	Система не має розв'язку.		Пряма і коло не перетинаються.

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА.

1. Знайти довжину відрізка AB, якщо $A(3;-1)$, $B(-2;-2)$.

Дано: $A(3;-1)$, $B(-2;-2)$. Знайти: AB.

Розв'язання. $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$; $AB^2=(3+2)^2+(-1+2)^2$; $AB^2=25+1=26$; $AB=\sqrt{26}$.

Відповідь: $\sqrt{26}$.

2. Дані точки $A(5;1)$ і $B(2;5)$. Скласти рівняння кола, радіусом якого є відрізок AB, а центром точка A.

Розв'язання. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – рівняння кола з центром $O(a;b)$ і з радіусом R. Центр кола – точка $A(5;1)$.

$R=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$; $R=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$. $R=5$.

Рівняння кола: $(x-5)^2+(y-1)^2=5^2$, $(x-5)^2+(y-1)^2=25$.

Відповідь: $(x-5)^2+(y-1)^2=25$.

3. Знайти центр кола на осі Oy, якщо відомо, що коло проходить через точку $A(3;6)$ і радіус кола дорівнює 5.

Розв'язання. Рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де $O(a;b)$. Центр кола лежить на осі Oy, тобто $a=0$, $R=5$, тоді рівняння набуде вигляду $(x-a)^2+(y-b)^2=5^2$; $x^2+(y-b)^2=25$.

Коло проходить через точку $A(3;6)$, тобто координати точки A задовольняють рівняння кола: $3^2+(6-b)^2=25$, $9+36-12b+b^2=25$, $b^2-12b+20=0$.

$b=6\pm\sqrt{36-20}$, $b=6\pm4$, $b_1=10$; $b_2=2$. Отже, центр кола $O_1(0;10)$ або $O_2(0;2)$.

Відповідь: $(0;10)$ або $(0;2)$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти відстань між точками $A(3;1)$, $B(-1;-2)$.
2. Скласти рівняння кола з центром $O(2;-3)$ і радіусом $R=5\,см$.
3. Обчислити периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(-2;4)$, $B(2;1)$, $C(-2;-2)$.
4. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4;-1)$, $B(1;4)$, $C(5;1)$, $D(0;-4)$ є паралелограмом. Знайти координати точок перетину діагоналей цього паралелограма.
5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-2;3)$ і $B(4;-3)$.
6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(9;3)$ і перпендикулярна осі Ox.
7. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $B(-3;10)$ і перпендикулярна осі Oy.
8. Точки $A(-1;3)$, $B(0;-1)$, $C(1;2)$ є серединами сторін трикутника. Знайти координати вершин цього трикутника.
9. Пряма $2y+x-4=0$ перетинає коло $x^2+y^2=5$. Знайти довжину хорди, що відсікається цим колом на прямій.
10. Довести, що лінія, задана рівнянням $x^2+y^2-6y+5=0$, є коло. Яке взаємне розміщення цього кола та кола $(x-4)^2+y^2=9$?

САМОСТІЙНА РОБОТА С-5-1

Тема. Декартові координати на площині

9 балів

В – І	В – ІІ
1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $(-2;1)$ і $(3;-2)$.	1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $(2;-1)$ і $(-2;3)$.
2. Вершинами трикутника ABC є точки $A(-3;0)$, $B(3;-1)$, $C(-1;4)$. Скласти рівняння медіани до сторони AC.	2. Вершинами трикутника ABC є точки $A(-1;1)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$. Скласти рівняння медіани до сторони BC.

12 балів

В – ІІІ	В – IV
1. Знайти на осі абсцис точку, рівновіддалену від точок $(2;3)$ і $(1;-2)$.	1. Знайти на осі ординат точку, рівновіддалену від точок $(3;2)$ і $(-2;1)$.
2. Трикутник заданий координатами своїх вершин: $A(2;-6)$, $B(4;2)$ і $C(0;-4)$. Знайти рівняння прямої, яка містить середню лінію трикутника і паралельна стороні AC.	2. В трикутнику ABC PK – середня лінія трикутника, паралельна AB, $P(2;3)$, $K(-1;2)$ і $C(0;0)$. Написати рівняння прямої, що містить сторону AB.
3. Вершинами трикутника є точки $A(0;4)$, $B(-2;-1)$, $C(4;0)$. Знайти довжину медіани, яка проведена до сторони AC.	3. Вершинами трикутника є точки $A(-2;-1)$, $B(0;6)$, $C(4;-2)$. Знайти довжину медіани, яка проведена до сторони BC.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-5-2

Тема. Рівняння кола

7 балів

В – І	В – ІІ
1. Скласти рівняння кола з центром у точці $(-1;2)$, яке проходить через точку $(2;-2)$.	1. Скласти рівняння кола з центром у точці $(2;-1)$, яке проходить через точку $(-2;2)$.
2. Знайти точки перетину кола $x^2+y^2=1$ з прямою $y=x-1$.	2. Знайти точки перетину кола $x^2+y^2=1$ з прямою $y=x+1$.

12 балів

В – ІІІ	В – IV
1. Знайти центр і радіус кола, заданого рівнянням: $x^2+y^2+2x-4y+4=0$.	1. Знайти центр і радіус кола, заданого рівнянням: $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.
2. З'ясувати взаємне розміщення прямої $x=19$ і кола $(x-7)^2+(y+6)^2=81$.	2. З'ясувати взаємне розміщення прямої $y=20$ і кола $(x-5)^2+(y-10)^2=100$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-5

Тема. Декартові координати на площині

9 балів

В – І	В – ІІ
1. У трикутнику ABC з вершинами $A(2;-1)$, $B(-1;3)$ і $C(-3;1)$ проведена медіана AD. Знайти довжину цієї медіани; скласти рівняння прямої AD.	1. У трикутнику ABC з вершинами $A(-6;4)$, $B(1;2)$ і $C(4;0)$ проведена медіана BD. Знайти довжину цієї медіани; скласти рівняння прямої BD.
2. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-3;4)$, $B(3;3)$, $C(2;-2)$ та $D(-4;1)$ є паралелограмом.	2. Довести, що чотирикутник $MNPK$ з вершинами в точках $M(-2;8)$, $N(3;9)$, $P(7;2)$ та $K(2;1)$ є паралелограмом.
3. Знайти радіус кола, що задане рівнянням: $x^2+y^2-10x+4y+13=0$.	3. Знайти радіус кола, що задане рівнянням: $x^2+y^2+6x+8y-11=0$.
4. Скласти рівняння кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, якщо координати вершин прямокутника: $A(4;1);B(0;4);C(-3;0);D(1;-3)$.	4. Скласти рівняння кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$, якщо координати вершин прямокутника: $A(1;2);B(2;4);C(6;2);D(5;0)$.

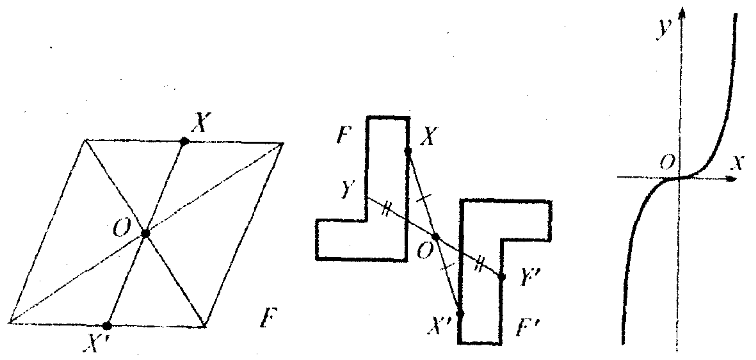
12 балів

В – ІІІ	В – IV
1. У трикутнику ABC з вершинами в точках $A(2;-3)$, $B(-2;3)$ та $C(6;-3)$ проведена середня лінія B_1C_1, паралельна стороні BC. Знайти довжину B_1C_1. Скласти рівняння прямої, яка містить цю середню лінію.	1. У трикутнику ABC з вершинами в точках $A(-1;2)$, $B(5;-10)$ і $C(1;-2)$ проведена середня лінія A_1B_1, паралельна стороні AB. Знайти довжину A_1B_1. Скласти рівняння прямої, яка містить цю середню лінію.
2. Знайти множину точок, віддалених від кола $x^2+y^2=16$ на відстань, що дорівнює $3\,см$.	2. Знайти множину точок, віддалених від кола $x^2+y^2=9$ на відстань, що дорівнює $7\,см$.
3. Скласти рівняння прямої, що проходить через центри кіл, які задані рівняннями: $(x+3)^2+(y-1)^2=4$; $(x-2)^2+(y+2)^2=9$.	3. Скласти рівняння прямої, що проходить через центри кіл, які задані рівняннями: $(x-5)^2+(y+1)^2=16$; $(x+3)^2+(y-2)^2=1$.
4. Знайти кут, який утворює пряма $x\sqrt{3}-y+5=0$ з віссю абсцис.	4. Знайти кут, який утворює пряма $x-y\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$ з віссю абсцис.

§6. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР. РУХ

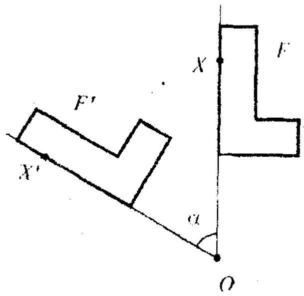
Рух – це перетворення, при якому зберігається відстань між точками фігури. $X'Y' = XY$.
При русі зберігаються кути між променями.

Симетрія відносно точки



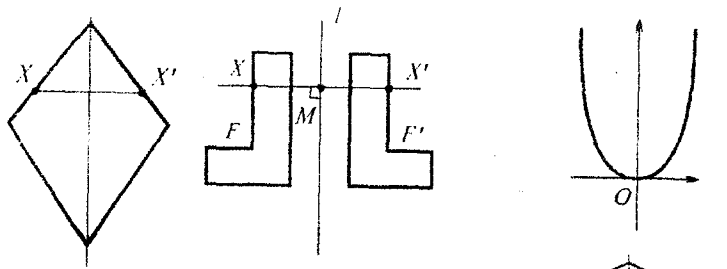
$OX' = OX$

Поворот

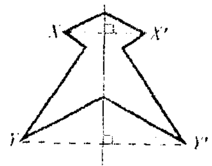


$OX' = OX \quad \angle XOX' = \alpha$

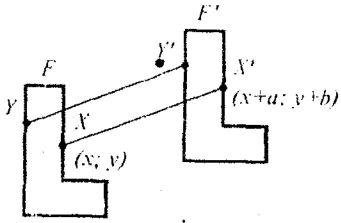
Симетрія відносно прямої



$XX' \perp l$; $XM = MX'$



Паралельне перенесення



Точки зміщуються по паралельних (або співпадаючих) прямих на одну і ту саму відстань.

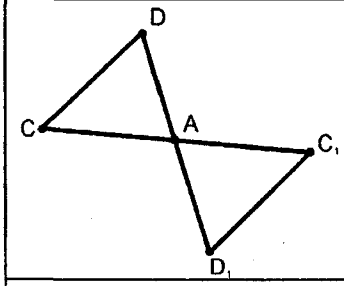
1. Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної точки O, називається <u>перетворенням симетрії відносно точки</u> O. Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F в себе, то вона називається <u>центрально-симетричною</u>, точка O називається <u>центром симетрії</u>.

2. Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної прямої, називається <u>перетворенням симетрії відносно прямої</u>.

3. <u>Поворотом площини навколо даної точки</u> називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямку.

4. Уведемо на площині декартові координати x, y. Перетворення фігури F, при якому будь-яка її довільна точка $(x; y)$ переходить в точку $(x+a; y+b)$, де a і b одні й ті самі для всіх точок (x, y), називається <u>паралельним перенесенням</u>. Паралельне перенесення задається формулами: $x' = x + a$; $y' = y + b$. Ці формули виражають координати x'; y' точки, у яку переходить точка $(x; y)$ при паралельному перенесенні.

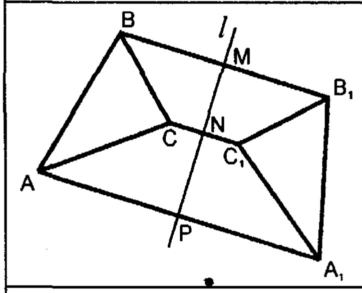
1. Дані відрізок CD і точка A, яка не лежить на прямій CD. Побудувати фігуру, симетричну відрізку CD відносно точки A.



Побудова.
$CA = AC_1$, $DA = AD_1$.

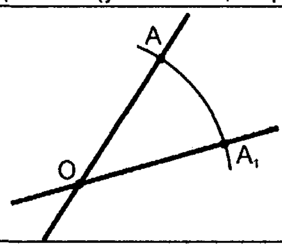
C_1 – симетрична точці C відносно точки A; D_1 – симетрична точці D відносно точки A.

2. Побудувати $\Delta A_1B_1C_1$ симетричний ΔABC відносно прямої MN.



Побудова.
1) $BB_1 \perp l$, $CC_1 \perp l$, $AA_1 \perp l$.
2) $BM = MB_1$, $CN = NC_1$, $AP = PA_1$.
3) $\Delta A_1B_1C_1$ симетричний ΔABC відносно прямої l.

3. Побудувати точку, в яку переходить дана точка A при повороті на $45°$ за годинниковою стрілкою (узяти за центр повороту довільну точку O).



Побудова.
$\angle AOA_1 = 45°$;
$AO = A_1O$; A_1 – шукана.

4. Паралельне перенесення задається формулами $x' = x + 4$; $y' = y - 7$. В які точки при цьому паралельному перенесенні перейдуть точки $A(3;-1)$; $B(-5;4)$?

1) $A(3;-1)$; $x = 3$; $y = -1$, тоді $x' = 3 + 4 = 7$; $y' = -1 - 7 = -8$, точка $A(3;-1)$ переходить в точку $A'(7;-8)$.

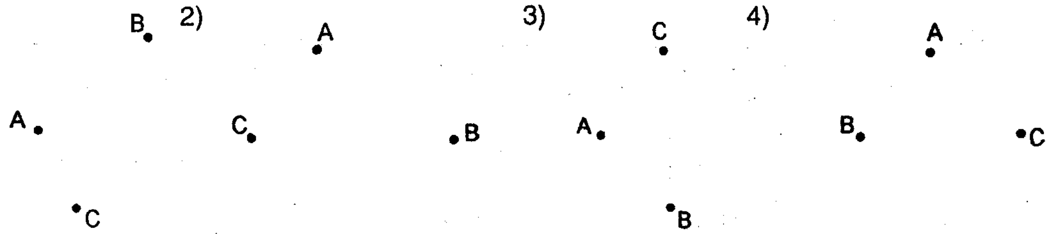
2) $B(-5;4)$; $x = -5$; $y = 4$, тоді $x' = -5 + 4 = -1$; $y' = 4 - 7 = -3$, точка $B(-5;4)$ переходить в точку $B'(-1;-3)$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Якою буде фігура, симетрична відносно даної точки A:
1) відрізку; 2) куту; 3) трикутнику.
2. Дані точки M, N, P. Побудувати точку P', симетричну точці P відносно прямої MN.
3. Знайти координати точки $(-2;3)$ симетричної відносно: 1) осі x; 2) осі y; 3) початку координат.
4. Довести, що пряма, яка містить медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.
5. Побудувати точку M_1, в яку перейде точка M при повороті навколо точки O на кут $45°$ проти годинникової стрілки.

6. Дані три точки A, B, C. Побудувати точку C_1, в яку переходить точка C при паралельному перенесенні, яке переводить точку A в точку B.

1) 2) 3) 4)



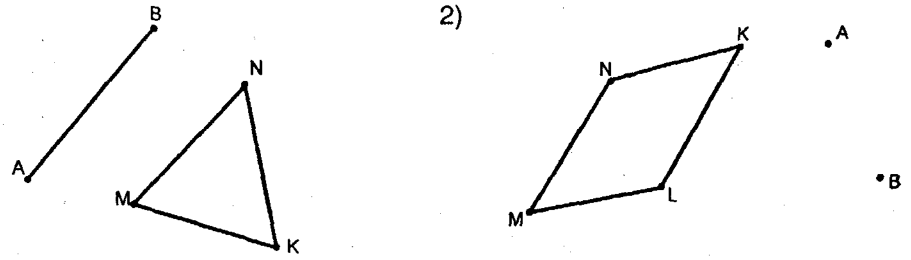
7. Довести, що діагоналі ромба є його осями симетрії.

8. Дано нерозгорнутий $\angle AOB$ і пряму c, що не проходить через точку O. Побудувати кут, симетричний куту AOB відносно прямої c. Чи має кут AOB вісь симетрії? Якщо має, то де вона знаходиться?

9. Чи може чотирикутник мати центр симетрії і за якої умови? Відповідь пояснити.

10. Побудувати фігури, у які перейдуть трикутник і паралелограм при паралельному перенесенні, що переводить точку A в точку B.

1) 2)



11. Накреслити відрізок AB і побудувати відрізок, у який він переходить при повороті навколо своєї середини на $60°$ проти годинникової стрілки.

12. В які точки при паралельному перенесенні переходять точки $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(2;3)$, якщо паралельне перенесення задане формулами $x' = x + 2$; $y' = y + 3$.

13. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-3;2)$, $B(1;4)$, $C(-5;2)$. Виконати паралельне перенесення так, щоб точка A змістилася в початок координат.

14. Побудувати квадрат зі стороною $6\ см$ і узяти на його сторонах по точці. Побудувати точки, у які переходять вибрані точки при повороті навколо точки перетину діагоналей квадрата на $90°$ за годинниковою стрілкою.

15. В яку фігуру переходить паралелограм $ABCD$ при симетрії відносно прямої, що проходить через сторону AD?

16. Знайти величини a і b у формулах паралельного перенесення $x' = x + a$, $y' = y + b$, якщо точка $(-1;-3)$ переходить у точку $(0;-2)$, а точка $(2;-3)$ – у точку $(-1;5)$.

17. Три вершини паралелограма знаходяться в точках $(0;2)$, $(4;6)$, $(6;0)$. Знайти координати його четвертої вершини.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-6-1

Тема. Перетворення фігур. Рух

В – І	1 – 6 балів	В – ІІ
1. Дан ΔABC. Побудувати точку, симетричну точці B відносно прямої AC.		1. Дан ΔABC. Побудувати точку A', симетричну точці A відносно вершини B.
2. Побудувати точку M', симетричну точці $M(-3;5)$ відносно початку координат. Записати координати побудованої точки.		2. Побудувати точку N', симетричну точці $N(4;-2)$ відносно осі y. Записати координати побудованої точки.
В – ІІІ	**7 – 9 балів**	**В – IV**
1. Паралельне перенесення задається формулами $x'=x-1$, $y'=y-3$. В які точки при паралельному перенесенні перейдуть точки $(-1;0)$, $(2;1)$?		1. Паралельне перенесення задається формулами $x'=x+4$, $y'=y-3$. В які точки при паралельному перенесенні перейдуть точки $B(1;0)$, $C(2;3)$?
2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $(0;2)$ переходить у точку $(-1;0)$, а точка $(2;1)$ – у точку $(1;-1)$?		2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $(1;2)$ переходить у точку $(3;4)$, а точка $(0;1)$ – у точку $(-1;0)$?
В – V	**10 – 12 балів**	**В – VI**
1. Вершини ΔABC знаходяться в точках $A(0;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;3)$. Виконати паралельне перенесення, яке переводить точку A в точку C. Знайти координати точки, у яку переходить при цьому паралельному перенесенні точка B.		1. Кінці відрізка знаходяться в точках $A(0;2)$ і $B(4;0)$. Виконати паралельне перенесення так, щоб середина відрізка змістилася в точку $(2;-1)$, і визначити координати кінців відрізка після перенесення.
2. Побудувати фігуру, у яку переходить трикутник ABC при повороті його навколо вершини A на кут $60°$.		2. Знайти величини a та b у формулах перенесення $x'=x+a$, $y'=y+b$, якщо точка $(1;2)$ переходить у точку $(3;4)$.

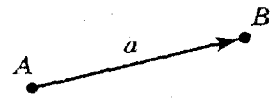
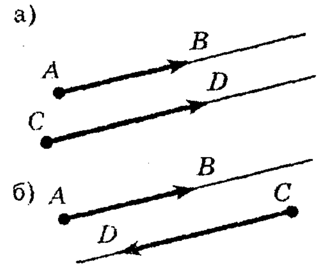
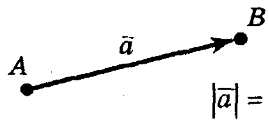
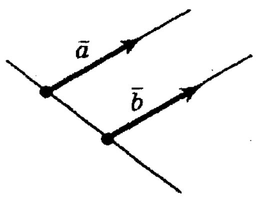
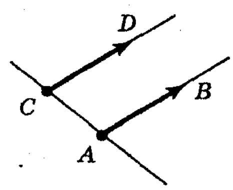
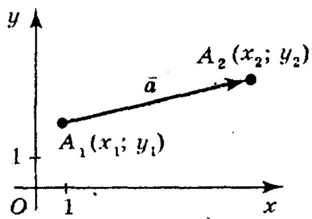
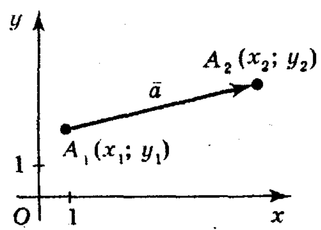
КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-6

Тема. Перетворення фігур. Рух

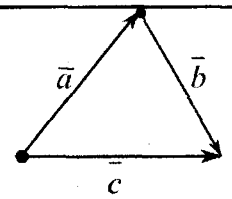
В – І	В – ІІ
1. В які точки при паралельному перенесенні перейдуть точки $A(4;2)$, $B(-3;-5)$, якщо паралельне перенесення задане формулами: $x'=x-1$, $y'=y+1$.	1. Паралельне перенесення задане формулами: $x'=x+4$, $y'=y-2$. Знайти координати точок $A(2;-3)$ і $B(5;1)$ при цьому паралельному перенесенні.
2. Дані точки $A(2;1)$, $B(6;5)$. Побудувати фігуру, симетричну відрізку AB відносно: а) осі Oy; б) точки $D(-2;0)$. Побудувати фігуру, яку отримаємо поворотом відрізка AB навколо точки B на $90°$ проти годинникової стрілки.	2. Дані точки $A(3;3)$, $B(-3;-2)$. Побудувати фігуру, симетричну відрізку AB відносно: а) осі Ox; б) точки $D(0;-2)$. Побудувати фігуру, яку отримаємо поворотом відрізка AB навколо точки B на $90°$ за годинниковою стрілкою.
3. Скільки осей симетрії має ромб, що не є квадратом? Відповідь підтвердити кресленням.	3. Скільки осей симетрії має прямокутник? Відповідь проілюструвати кресленням.

В – III	В – IV
1. Дан рівносторонній трикутник ABC. Побудувати фігуру, у яку він перейде: а) при симетрії відносно прямої AC; б) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AC}$; в) при повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо точки A.	1. Дан рівносторонній трикутник ABC. Побудувати фігуру, у яку він перейде: а) при симетрії відносно точки C; б) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AB}$; в) при повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо точки B.
2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $(3;1)$ переходить у точку $(1;3)$, а точка $(2;0)$ в точку $(0;2)$?	2. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка $(2;3)$ переходить у точку $(3;2)$, а точка $(1;4)$ в точку $(4;1)$?
3. Знайти величини a і b у формулах паралельного перенесення: $x' = x + a$, $y' = y + b$, якщо точка $(1;2)$ переходить у точку $(3;4)$, а точка $(0;1)$ – у точку $(-1;0)$.	3. Знайти величини a і b у формулах паралельного перенесення: $x' = x + a$, $y' = y + b$, якщо точка $(-3;4)$ переходить у точку $(-3;3)$, а точка $(5;-2)$ – у точку $(6;-1)$.
В – V	**В – VI**
1. Дано прямокутник $ABCD$. Побудувати фігуру, на яку відображається цей чотирикутник: а) при центральній симетрії з центром у точці D; б) при осьовій симетрії з віссю AC; в) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{BD}$.	1. Дано прямокутник $ABCD$. Побудувати фігуру, на яку відображається цей чотирикутник: а) при осьовій симетрії з віссю CD; б) при центральній симетрії з центром у точці C; в) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AC}$.
2. Дано точки $M(0;-4)$ і $N(-1;3)$. Паралельне перенесення переводить точку N в точку O, яка є серединою відрізка MN. Знайти координати точки, в яку переходить точка M при цьому перенесенні. Записати формули цього паралельного перенесення.	2. При паралельному перенесенні точка $D(-5;4)$ переходить у точку $D'(-1;0)$. Знайти координати точки, в яку переходить точка $B(-1;-9)$. Записати формули цього паралельного перенесення.
3. При симетрії відносно середини сторони AC у ΔABC вершина переходить у точку D. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.	3. При симетрії відносно середини сторони AC вершина B рівностороннього трикутника ABC переходить у точку D. Довести, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом.

§7. ВЕКТОРИ

Означення	Приклади
<u>Вектором</u> називається напрямлений відрізок.	
Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ <u>називаються однаково напрямленими</u>, якщо однаково напрямлені й півпрямі AB і CD. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються <u>протилежно напрямленими</u>, якщо протилежно напрямлені й півпрямі AB і CD.	
<u>Абсолютною величиною</u> (або модулем) вектора називається довжина відрізка, що задає вектор. Абсолютна величина нуль-вектора дорівнює нулю.	 $\lvert\vec{a}\rvert = AB$ $\lvert\vec{0}\rvert = 0$
Два вектори називаються <u>рівними</u>, якщо вони зміщуються паралельним перенесенням.	
Рівні вектори однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною. І навпаки, якщо вектори однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною, то вони рівні.	 $\overline{CD} = \overline{AB}$
Нехай вектор $\overline{a}$ має початком точку $A_1(x_1; y_1)$, а кінцем – точку $A_2(x_2; y_2)$. <u>Координатами вектора</u> $\overline{a}$ називаються числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.	
<u>Абсолютна величина</u> вектора з координатами a_1, a_2 дорівнює арифметичному квадратному кореню із суми квадратів його координат.	 $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Дії з векторами

Сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ з координатами a_1, a_2 і b_1, b_2 називається вектор $\overline{c}$ з координатами a_1+b_1, a_2+b_2, тобто $\overline{a}(a_1;a_2)+\overline{b}(b_1;b_2)=\overline{c}(a_1+b_1;a_2+b_2)$.	 $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$

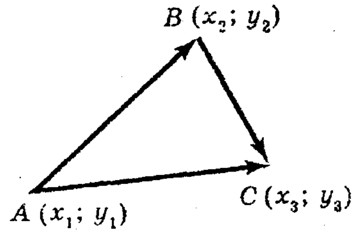
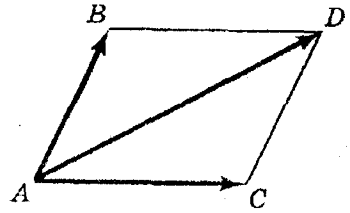
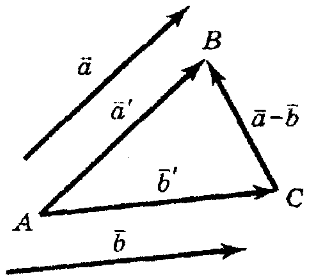
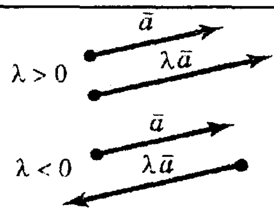
Закони додавання векторів

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$$

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$$

Правила додавання векторів

Правило трикутника Якими б не були точки A, B, C, підтверджується векторна рівність: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.	 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$
Правило паралелограма Для векторів із спільним початком їх сума зображується діагоналлю паралелограма, який побудовано на цих векторах, до того ж початок вектора-суми збігається з початком цих векторів.	 $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$
Правило для побудови різниці двох векторів Щоб побудувати вектор, який дорівнює різниці векторів $\overline{a}'$ і $\overline{b}'$, треба від однієї точки відкласти вектори $\overline{a}'$ і $\overline{b}'$, що дорівнюють їм. Тоді вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\overline{b}'$, а кінець – з кінцем вектора $\overline{a}'$, буде різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.	 $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}$
Добутком вектора $\overline{(a_1;a_2)}$ на число λ називається вектор $\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$, тобто $\overline{(a_1;a_2)}\lambda=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$.	

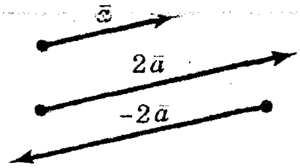
Закони множення вектора на число

Для будь-якого вектора $\overline{a}$ та чисел λ, μ $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$.

Для будь-яких двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та числа λ $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.

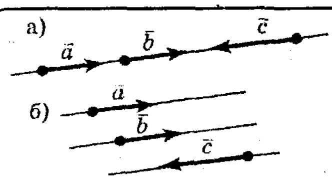
Властивості множення вектора на число

Абсолютна величина вектора $\lambda\overline{a}$ дорівнює $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$.
Напрям вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a}\neq 0$ збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний напряму вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$.



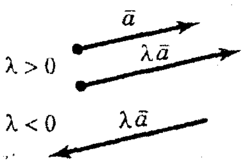
1) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$;
2) $\lambda\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$, якщо $\lambda>0$;
3) $\lambda\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}$, якщо $\lambda<0$.

Два ненульових вектори називаються <u>колінеарними</u>, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.



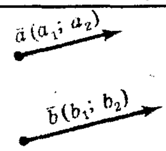
Ознаки колінеарності двох векторів

Якщо ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ зв'язані співвідношенням $\overline{b}=\lambda\overline{a}\ (\lambda\neq 0)$, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні. І навпаки, якщо ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, то існує таке число $\lambda\neq 0$, що $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.



$\overline{b}=\lambda\overline{a}$; $\overline{a}\parallel\overline{b}$

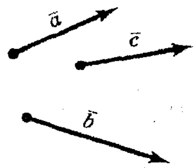
Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні. І навпаки, якщо відповідні координати двох векторів пропорційні, то ці два вектори колінеарні.



$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$; $\overline{a}\parallel\overline{b}$

Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами

Будь-який вектор $\overline{c}$ можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ у вигляді $\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$, до того ж це розкладання єдине.

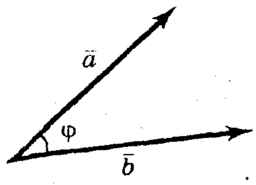


$\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$

<u>Скалярним добутком</u> векторів $\overline{a}(a_1;a_2)$ і $\overline{b}(b_1;b_2)$ називається число $a_1b_1+a_2b_2$.

Властивості скалярного добутку векторів

1. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його абсолютної величини, тобто $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$
2. Для будь-яких векторів $\overline{a}(a_1,a_2)$; $\overline{b}(b_1,b_2)$; $\overline{c}(c_1,c_2)$, $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}$
3. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.
4. Якщо скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює нулю, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні.



$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$ $\quad\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$

$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$

Задача 1. Дані три точки $A(2;2)$, $B(-2;0)$, $C(0;2)$. Знайти таку точку $D(x;y)$, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ були рівні.

Розв'язання.

$\overline{AB}(-4;-2)$, $\overline{CD}(x-0;\ y-2)$. Оскільки $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $x-0=-4$; $y-2=-2$. Звідси знаходимо координати точки D: $x=-4$; $y=0$.

Відповідь: $D(-4;0)$.

Задача 2. Знайти координати і абсолютну величину вектора $\overline{CD}$, якщо $C(3;5)$, $D(7;5)$.

Розв'язання.

$\overline{CD}(7-3;5-5)$; $\overline{CD}(4;0)$, $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$.

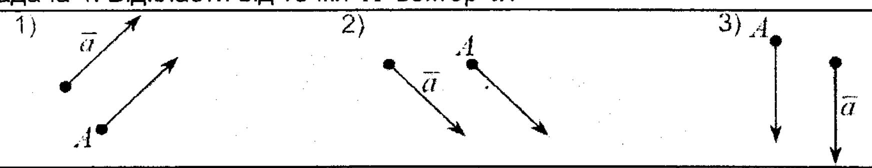
Задача 3. Дані вектори: $\overline{a}(3;2)$ і $\overline{c}(-1;6)$. Знайти координати векторів: $\overline{a}+\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{c}$; $-\frac{1}{3}\overline{a}$.

Розв'язання.

$\overline{a}+\overline{c}=\overline{a}(3;2)+\overline{c}(-1;6)=\overline{(3-1;2+6)}=\overline{(2;8)}$;

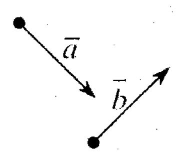
$\overline{a}-\overline{c}=\overline{a}(3;2)-\overline{c}(-1;6)=\overline{(3+1;2-6)}=\overline{(4;-4)}$; $-\frac{1}{3}\overline{a}=-\frac{1}{3}\overline{(3;2)}=\overline{\left(-1;-\frac{2}{3}\right)}$

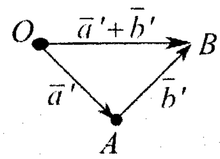
Задача 4. Відкласти від точки A вектор $\overline{a}$.



Задача 5. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати вектор: 1) $\overline{a}+\overline{b}$, 2) $\overline{a}-\overline{b}$.

1)



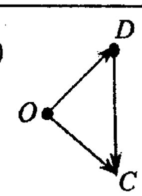


1) $\overline{OA}=\overline{a}$

2) $\overline{AB}=\overline{b}$

3) $\overline{OB}=\overline{a}+\overline{b}$

2)



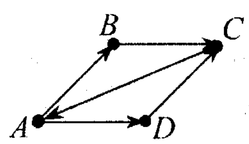
1) $\overline{OC}=\overline{a}$

2) $\overline{OD}=\overline{b}$

3) $\overline{DC}=\overline{a}-\overline{b}$ або

$\overline{OC}-\overline{OD}=\overline{DC}$

Задача 6. Дан паралелограм $ABCD$. Виразити вектор $\overline{CA}$ через вектори $\overline{CB}$ і $\overline{CD}$.



Розв'язання.

$\overline{CB}+\overline{CD}=\overline{CA}$

Задача 7. Знайти кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\left|\overline{a}\right|=4\sqrt{2}$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=12$.

Розв'язання.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$; $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\dfrac{12}{4\sqrt{2}\cdot 3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\varphi=45^0$.

Відповідь: кут між векторами $45°$.

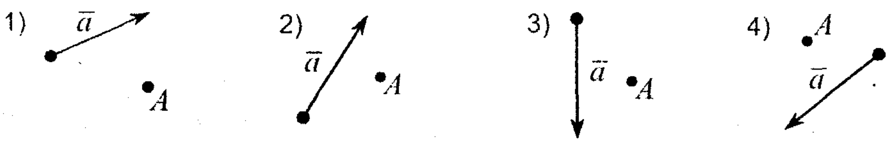
Задача 8. Довести, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ перпендикулярні, якщо $\overline{a}(3;2)$, $\overline{c}(6;-9)$.

Розв'язання.

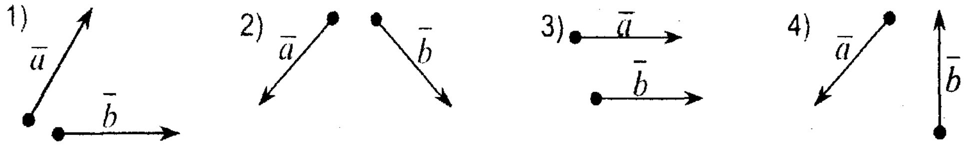
Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю $\overline{a}\cdot\overline{c}=0$, $\overline{a}\cdot\overline{c}=3\cdot 6-2\cdot 9=0$, тобто $\overline{a}\perp\overline{c}$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Відкласти від точки A вектор $\overline{a}$.



2. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати вектори $\overline{a}+\overline{b}$ і $\overline{a}-\overline{b}$.



3. Знайти:

а) координати вектора $\overline{AB}$, якщо:

1) $A(1;3)$, $B(4;5)$; 2) $A(5;4)$, $B(3;7)$; 3) $A(1;2)$, $B(-3;-5)$;

б) абсолютну величину вектора $|\overline{AB}|$.

4. Знайти координати вектора $\overline{a}+\overline{b}$ і $\overline{a}-\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}(1;3), \overline{b}(4;5)$;

2) $\overline{a}(3;7), \overline{b}(2;9)$;

3) $\overline{a}(0;2), \overline{b}(3;0)$.

5. Серед векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ знайти колінеарні вектори, вказати однаково напрямлені і протилежно напрямлені.

1) $\overline{a}(2;1), \overline{b}(2;3), \overline{c}(6;3)$;

2) $\overline{a}(2;5), \overline{b}(4;10), \overline{c}(6;10)$;

3) $\overline{a}(1;7), \overline{b}(2;-3), \overline{c}(4;-6)$.

6. Обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}(2;5), \overline{b}(3;4)$;

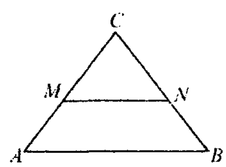
2) $\overline{a}(1;3), \overline{b}(3;0)$.

7. Дан паралелограм $ABCD$. Виразити вектор $\overline{DB}$ через вектори $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$.

8. Дані точка $A(2;1)$ і вектор $\overline{a}(2;1)$. Знайти таку точку B, щоб вектор $\overline{AB}$ дорівнював вектору $\overline{a}$.

9. Дан квадрат $ABCD$. Довести рівність векторів $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$. Пояснити, чому вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ не рівні, хоча $\overline{AB}=\overline{BC}$.

10. В ΔABC MN – середня лінія. Знайти координати $\overline{BA}$, якщо $\overline{MN}(3;-4)$.



11. Знайти кут між векторами $\overline{a}(1;\sqrt{3})$ і $\overline{b}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

12. Дані вектори $\overline{a}(3;4)$ і $\overline{b}(m;2)$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

13. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

14. Дані чотири точки $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$ і $D(-1;2)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – прямокутник.

15. Вершинами трикутника ABC є точки $A(-3;0)$, $B(3;-1)$, $C(-1;4)$. Знайти довжину медіани, проведеної до сторони AC.

16. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ рівні між собою. Знаючи, що $A(-2;5)$, $B(0;3)$, $D(7;10)$, знайти координати точки C.

17. AD – медіана ΔABC. Довести, що $\overline{AD}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)$.

18. AD – медіана ΔABC з вершинами $A(0;7)$, $B(5;-2)$, $C(11;4)$. Знайти модуль вектора $\overline{AD}$.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-7-1

<table>
<tr><th>В – I</th><th>7 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Дані вектори $\overline{m}(4;-3)$ і $\overline{n}(-2;1)$. Знайти координати вектора:
а) $\overline{m}+\overline{n}$; б) $\overline{m}-\overline{n}$,
обчислити $\left|\overline{m}+\overline{n}\right|$.</td><td>1. Дані точки $A(1;2)$, $B(3;0)$, $C(-4;5)$, $D(-6;7)$. Встановити, чи рівні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Дані точки $A(1;2)$, $B(3;0)$, $C(-4;5)$, $D(-6;7)$. Встановити, чи рівні вектори $\overline{BA}$ і $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.</td><td>2. Дані вектори $\overline{p}(-3;2)$ і $\overline{q}(1;6)$. Знайти вектори:
а) $\overline{p}+\overline{q}$; б) $\overline{p}-\overline{q}$, обчислити $\left|\overline{p}-\overline{q}\right|$.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>9 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Дан паралелограм $ABCD$. Виразити через вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ вектор $\overline{AC}$, вектор $\overline{DB}$.</td><td>1. Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Виразити через вектори $\overline{DA}$ і $\overline{DC}$ вектор $\overline{AC}$, вектор $\overline{DB}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Дан ΔABC: $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;5)$ – вершини ΔABC. Знайти косинуси кутів трикутника ABC.</td><td>2. Дані вершини ΔABC: $A(-2;1)$, $B(-2;4)$, $C(2;1)$. Знайти косинуси кутів трикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Дані вектори $\overline{a}(3;4)$ і $\overline{b}(x;6)$. При якому значенні x ці вектори перпендикулярні?</td><td>3. Дані вектори $\overline{a}(2;3)$ $\overline{b}(3;y)$. При якому значенні y ці вектори перпендикулярні?</td></tr>
<tr><th>В – V</th><th>12 балів</th><th>В – VI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Дан ΔMPQ. Побудувати різницю векторів $\overline{MP}$ і $\overline{PQ}$, $\overline{MP}$ і $\overline{QM}$.</td><td>1. Дан ΔKZM. Побудувати вектори:
а) $\overline{ZK}+\overline{ZM}$; б) $\overline{KM}-\overline{ZM}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Дані точки $A(1;-3)$ і $B(2;0)$. Знайти таку точку $C(x;y)$, щоб вектори $\overline{CA}$ і $\overline{AB}$ були рівні.</td><td>2. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1;-2)$, $B(2;-5)$, $C(1;-2)$, $D(-2;1)$ – паралелограм.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-2;-3)$, $B(-1;1)$, $C(2;3)$, $D(1;-1)$ – паралелограм.</td><td>3. Дані три точки $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$. Знайти таку точку $D(x;y)$, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ були рівні.</td></tr>
</table>

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-7

7 балів

В – І	В – ІІ
1. Дані точки $A(4;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;4)$, $D(-4;1)$: а) знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; б) знайти косинус кута між векторами $\overline{AD}$ і $\overline{DC}$; в) знайти вектор $\overline{a}\,(a_1;a_2)$, рівний $2\overline{AC}-3\overline{BD}$.	1. Дані точки $A(8;-3)$, $B(2;5)$, $C(10;11)$, $D(16;3)$: а) знайти координати векторів $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$; б) знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$; в) знайти вектор $\overline{b}\,(b_1;b_2)$, рівний $5\overline{DA}-2\overline{AB}$.
2. Дан паралелограм $ABCD$. Виразити вектори $\overline{CA}$ і $\overline{DB}$ через вектори $\overline{CB}$ і $\overline{CD}$.	2. Дан ромб $ABCD$. Виразити вектори $\overline{BD}$ і $\overline{CA}$ через вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$.
3. Чи рівні вектори $\overline{AM}$ і $\overline{BN}$, якщо їх початки і кінці мають такі координати: $A(5;3)$, $M(4;7)$, $B(3;5)$, $N(4;1)$.	3. Дана рівнобічна трапеція $KZMN$ с основами KM і ZM. Чи рівні вектори $\overline{KZ}$ і $\overline{NM}$?

9 балів

В – ІІІ	В – IV
1. Дані точки: $A(3;1)$, $B(5;4)$, $C(2;0)$, $D(3;-7)$. Знайти: а) $\lvert\overline{AD}\rvert$ і $\lvert\overline{BC}\rvert$; б) $3\overline{AD}+2\overline{BC}$; в) скалярний добуток $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.	1. Дані точки: $M(2;4)$, $N(-1;2)$, $P(0;1)$, $F(1;3)$. Знайти: а) $\lvert\overline{MP}\rvert$ і $\lvert\overline{NF}\rvert$; б) $2\overline{MP}+4\overline{NF}$; в) скалярний добуток $\overline{MN}\cdot\overline{PF}$.
2. Знайти кут між векторами $\overline{a}\,(4;3)$ і $\overline{b}\,(3;4)$.	2. Знайти кут між векторами $\overline{a}\,(-4;3)$ і $\overline{b}\,(3;-4)$.
3. Дані три точки $A(2;2)$, $B(0;1)$, $C(1;2)$. Знайти таку точку $D(x,y)$, щоб вектор $\overline{AB}$ дорівнював вектору $\overline{CD}$.	3. Дані три точки $A(1;3)$, $B(4;5)$, $D(7;6)$. Знайти таку точку C, щоб вектор $\overline{AB}$ дорівнював вектору $\overline{CD}$.
4. Дані вектори $\overline{a}\,(4;3)$ і $\overline{b}\,(m;2)$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?	4. Дані вектори $\overline{a}\,(1;4)$ і $\overline{b}\,(-3;2)$. Знайти таке число λ, щоб вектор $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ був перпендикулярний вектору $\overline{b}$.

12 балів

В – V	В – VI
1. Дані точки: : $A(5;4)$, $B(6;7)$, $C(-1;0)$, $D(2;1)$. Знайти: а) координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CA}$; б) модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CA}$; в) координати вектора $\overline{a}$: $\overline{a}=2\overline{AB}-3\overline{BC}$; г) косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$.	1. Дані точки: : $A(-1;4)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$, $D(3;7)$. Знайти: а) координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CA}$; б) модулі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CA}$; в) координати вектора $\overline{b}$: $\overline{b}=3\overline{AB}-2\overline{BC}$; г) косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.
2. Дані вектори: $\overline{a}\,(1;0)$, і $\overline{b}\,(2;5)$. Знайти абсолютну величину вектора $2\overline{a}+3\overline{b}$.	2. Дані вектори: $\overline{a}\,(3;5)$, і $\overline{b}\,(1;2)$. Знайти абсолютну величину вектора $-2\overline{a}+5\overline{b}$.
3. Дані вектори: $\overline{a}\,(2;-4)$, і $\overline{b}\,(1;k)$. При якому значенні k вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$: 1) колінеарні; 2) перпендикулярні.	3. Дані вектори: $\overline{c}\,(2;6)$, і $\overline{d}\,(-3;m)$. При якому значенні m вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$: 1) колінеарні; 2) перпендикулярні.
4. Дані точки: $A(2;2)$, $B(3;4)$, $C(1;5)$, $D(0;3)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – прямокутник.	4. Дані точки: $A(0;0)$, $B(1;3)$, $C(4;4)$, $D(3;1)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – ромб.

ВІДПОВІДІ

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

§1. 10. $\frac{4}{5}$ *см*; 1 *см*; $\frac{4}{5}$ *см*. **11.** $45°$. **12.** $45°$; $135°$. **13.** $\varphi = 45°$. **14.** $50\frac{2}{3}$ *см*. **18.** $\overline{AB} = \overline{b}$ **28.** 11 *см*. **30.** [illegible] **32.** 6,8 *см*. **33.** 2,5 *см*.

§2. 1. 8 *см*; 16 *см*; 24 *см*. **2.** $3\frac{1}{3}$ *см*. **4.** 28 *см*. **5.** 5 *см*; 4 *см*. **7.** 60 *см*. **8.** 19 *см*. **10.** 5 *см*. **11.** 12,5 *см*. **12.** 36 *см*. **14.** 12 *см* и 24 *см*. **15.** 6,2 *см*. **18.** 3,9 *см*.

§3. 1. 13 *см*. **2.** 42 *см*. **3.** 148 *см*. **4.** 16 *см*; 30 *см*. **5.** $6\sqrt{2}$ *см*. **6.** 2 *см*; 10 *см*. **7.** $11\frac{3}{7}$ *см*; $6\frac{3}{7}$ *см*. **8.** $2\sqrt{10}$ *см*; $6\sqrt{10}$ *см*. **9.** $m\sqrt{3}$. **10.** 10 *см*. **11.** 0,3 *см*; 0,4 *см*. **12.** 23 *см*; 38 *см*. **13.** 12,5 *см*. **14.** 17 *см*. **15.** 30 *см* или 40 *см*. **16.** $4\sqrt{2}$ *см*; 8 *см*. **17.** $14\sqrt{3}$ *см*. **18.** 40 *см*. **19.** $3\sqrt{5}$ *см*. **20.** $3\sqrt{117}$ *см*; $2\sqrt{117}$ *см*. **21.** 15 *см*.
22. $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

§4. 1. а) $\sqrt{3} - 3{,}5$; б) $\frac{3\sqrt{2}+4}{2}$; в) $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 0{,}5$. **3.** а) $\sin 5°$; $\sin 15°$; $\sin 78°$; б) $\cos 75°$; $\cos 33°$; $\cos 11°$; в) $tg 21°$; $tg 60°$; $tg 43°$. **4.** а) $\sin\alpha \cos\alpha$; б) $\sin\alpha \cos\alpha$; ; в) 2; г) $2\cos^2\alpha$; д) $-tg^2\alpha$; **5.** а) 2; б) 4; в) 1; г) 0.

§5. 1. 5. **2.** $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. **3.** 16. **4.** $(0{,}5;\ 0)$. **5.** $-x - y + 1 = 0$. **6.** $x = 9$. **7.** $y = 10$. **8.** $(0;6)$; $(-2;0)$; $(2;-2)$. **9.** $\sqrt{10{,}5}$. **10.** Дотикаються.

§6. 12. $A'(2;3)$; $B'(3;3)$; $C'(4;6)$. **13.** $A'(0;0)$; $B'(4;2)$; $C'(-2;0)$. **17.** $(-2;\ -4)$.

§7. 6. а) 26; б) 3. **7.** $\overline{DB} = -(\overline{BA} + \overline{BC})$. **8.** $B(4;2)$. **11.** $60°$. **12.** $-\frac{8}{3}$.

САМОСТІЙНІ РОБОТИ

С-1-1. В-І. 1. 22 *см*; 28 *см*. **2.** 63°; 63°; 54°. **В-ІІ. 1.** 45,5 *см*; 52,5 *см*. **2.** 45°; 45°; 90°. **В-ІІІ. 1.** 0,2 *дм*; 0,34 *дм*. **В-IV. 1.** 0,2 *дм*; 0,3 *дм*.

С-2-1. В-І. 1. 6,25 *см*. **2.** 5 *см*; 17 *см*; 7,5 *см*; 21 *см*. **В-ІІ. 1.** 13,4 *см*. **2.** 4 *см*; 16 *см*; 5 *см*; 23 *см*. **В-ІІІ. 1.** 14,6 *см*. **2.** 25 *см*. **В-IV. 1.** 6 *см* и 9 *см*. **2.** 47,5 *см* и 52,5 *см*.

С-3-1. В-І. 8 *см*. **В-ІІ.** 4 *см*. **В-ІІІ.** 13 *см*. **В-IV.** 14 *см*.

С-4-1. В-І. 2. 0,8. **3.** 0. **В-ІІ. 2.** 0,8. **3.** 0. **В-ІІІ. 2.** $\pm\frac{3}{5}$. **3.** 0. **В-IV. 2.** $\pm\frac{5}{13}$. **3.** 0.

С-5-1. В-І. 1. $-3x + y - 5 = 0$. **2.** $-0{,}6x - y + 0{,}8 = 0$. **В-ІІ. 1.** $-x - y + 1 = 0$. **2.** $\frac{2}{3}x - y + 1\frac{2}{3} = 0$. **В-ІІІ. 1.** $(4;0)$. **2.** $-x - y + 1 = 0$. **3.** $0{,}75x - y + 0{,}5 = 0$. **В-IV. 1.** $(0;4)$. **2.** $\frac{1}{3}x - y + 4\frac{2}{3} = 0$. **3.** $0{,}75x - y + 0{,}5 = 0$.

С-5-2. В-І. 1. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$. **2.** $(0;-1)$; $(1;0)$. **В-ІІ. 1.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. **2.** $(0;1)$; $(-1;0)$. **В-ІІІ. 1.** $(-1;2)$; 1. **2.** Не перетинаються. **В-IV. 1.** $(2;-1)$; 3. **2.** Не перетинаються.

С-6-1. В-ІІІ. 1. $(-2;-3)$; $(1;-2)$. **В-IV. 1.** $B'(5;-3)$, $C'(6;0)$. **В-V. 1.** $B'(1;7)$.

В-VI. 1. $A'(0;0); B'(4;-2)$. **2.** $a=2; b=2$.

С-7-1. В-І. 1.а) $(\overline{2;-2})$; б) $(6;-4)$; в) $\sqrt{8}$. **В-ІІ.2.** а) $(\overline{-2;4})$; б) $(\overline{-4;4})$; в) $\sqrt{8}$.

В-ІІІ.3. -8. **В-IV.3.** -2. **В-V.2.** $(0;-6)$. **В-VI. 3.** $D(-2;0)$.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

К-1. В-І. 1. 12 *см.* **В-ІІ. 1.** 56 *см.* **В-ІІІ. 1.** 9,5 *см*; 33,5 *см.* **В-IV. 1.** 102 *см.*

К-2. В-І. 1. 72 *см.* **2.** 41 *см.* **В-ІІ. 1.** 60 *см.* **2.** 14 *см.* **В- ІІІ. 1.** 8 *см*; 19 *см.*
2. 7 *см* и 21 *см.* **В-IV. 1.** 14 *см* и 28 *см.* **2.** 140 *см* или 116 *см.*

К-3. В-І. 1. 17 *см*; 21 *см.* **2.** $10\frac{2}{3}$ *см.* **В-ІІ. 1.** 9 *см*; 10 *см*; $6\sqrt{5}$ *см.* **2.** 3,6 *см.*

В-ІІІ. 1. $6\sqrt{3}$ *см.* **2.** 180 *см.* **В-IV. 1.** $8\sqrt{3}$. **2.** 36 *см.*

К-4. В-І. 1. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$. **3.** а) $2\cos^2\alpha$; б) $-\cos^2\alpha$. **В-ІІ. 1.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 1,5. **2.** $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$. **3.** а) $2\sin^2\alpha$; б) $-\sin^2\alpha$. **В- ІІІ. 1.** а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) 1.
2. $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$. **3.** а) $2+2\cos^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha$. **В-IV. 1.** . а) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; б) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$; в) 1. **2.** $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$.
3. а) $2+2\sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha$.

К-5. В-І. 1. 5. **3.** 4. **4.** $(x-0,5)^2+(y-0,5)^2=12,5$. **В-ІІ. 1.** 2. **3.** 6.
4. $(x-3,5)^2(y-2)^2=6,25$. **В- ІІІ. 1.** $5,075x-y=0$. **2.** $x^2+y^2=49$.
3. $3x+5y+4=0$. **4.** $60°$. **В-IV. 1.** $3\sqrt{5}$; $2x+y=0$. **2.** $x^2+y^2=100$. **3.** $3x+8y-7=0$.
4. $30°$.

К-6. В-І. 1. $A'(3;3); B'(-4;-4)$. **В-ІІ.** $A'(6;-5); B'(9;-1)$. **В-V. 2.** $M'(0,5;-7,5)$. **В-VI. 2.** $B'(3;-13)$.

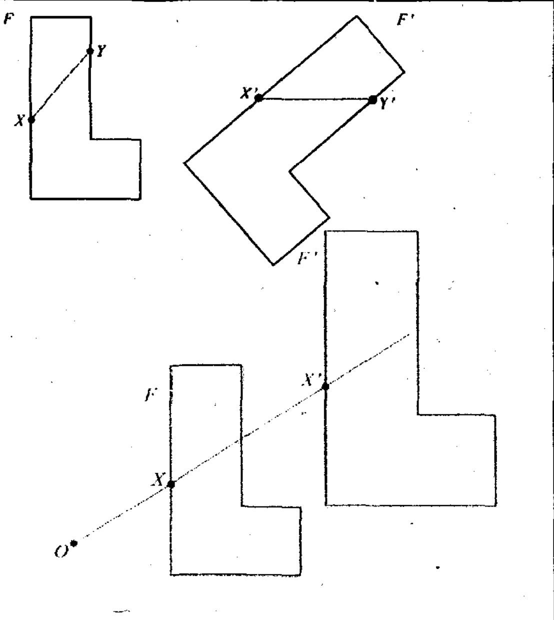
К-7. В-І. 1.в) $(\overline{13;22})$. **В-ІІ. 1.**в) $(\overline{-28;14})$. **В- ІІІ. 1.**а) $8;5$; б) $(-6;-32)$; в) 32. **2.** $D(3;1)$.
3. $m=-\frac{3}{2}$. **В-IV. 1.**а) $\sqrt{13}$ і $\sqrt{5}$; б) $(\overline{-12;-10})$; в) -7. **2.** $C(4;4)$. **3.** $\lambda=0,5$. **В-V. 2.** 17.
3. 1) -2; 2) 0,5. **В-VI. 2.** 1. **3.** 1) 9; 2) 1.

9 клас

- Подібність фігур
- Розв'язування трикутників
- Многокутники
- Площі фігур
- Початкові відомості з стереометрії

§1. ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

Перетворення подібності



Перетворення фігури F у фігуру F' називається перетворенням подібності, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одне і те саме число раз.

$$X'Y' = k \cdot XY$$

k – коефіцієнт подібності.

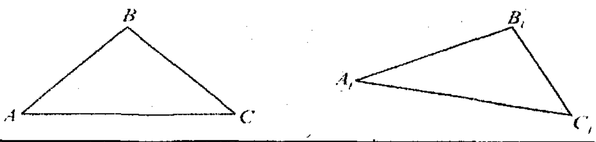
Нехай F – дана фігура і O – фіксована точка. Через довільну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX', рівний $k \cdot OX$, де k – додатне число. Перетворення фігури F, при якому кожна її точка X переходить в точку X', побудовану таким способом, називається гомотетією відносно центра O.

$\dfrac{OX'}{OX} = k$, де k – коефіцієнт подібності.

Властивості перетворення подібності

1. Перетворення подібності переводить прямі – у прямі, півпрямі – у півпрямі, відрізки – у відрізки.
2. Перетворення подібності зберігає кути між півпрямими.

Подібність трикутників



Два трикутники називаються подібними, якщо вони переводяться один в одний за допомогою перетворення подібності. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Властивості

1. У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки – пропорційні:

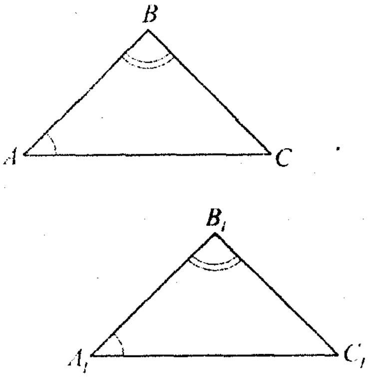
$$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1\quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{R}{R_1} = \ldots = k.$$

2. Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін і дорівнює коефіцієнту подібності: $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$.

3. Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності:

$$\frac{S\Delta ABC}{S\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2.$$

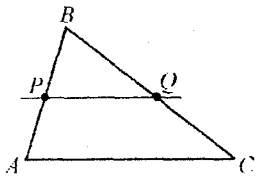
Ознаки подібності трикутників

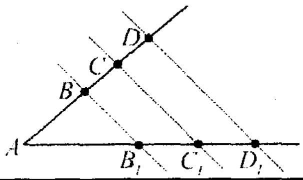


1. Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ – за двома рівними кутами.

2. Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ – за двома пропорційними сторонами і куту між ними.

3. Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ – за трьома пропорційними сторонами.





Якщо $PQ \parallel AC$, то $\Delta PBQ \backsim \Delta ABC$. Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.

Якщо $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, то $AB : BC : CD = AB_1 : B_1C_1 : C_1D_1$.

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки.

Зокрема, якщо $AB = BC = CD$, то $AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1$ – теорема Фалеса.

Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

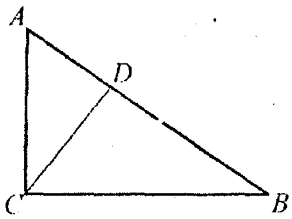
Подібність прямокутних трикутників

1. Для подібності двох прямокутних трикутників достатньо, щоб у них було по рівному гострому куту.

2. У ΔABC $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, тоді $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (за гострим кутом при вершині B).

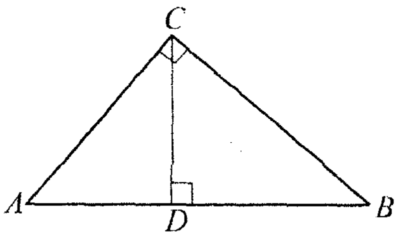
З подібності випливає: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$ або $BC = \sqrt{AB \cdot BD}$.

Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.



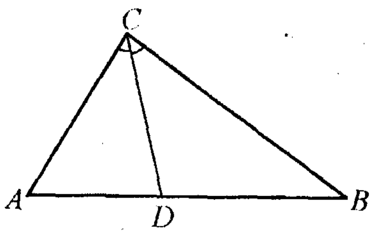
$AC^2 = AD \cdot AB$; $BC^2 = BD \cdot AB$

3. $\Delta ACD \backsim \Delta CBD$ (у них рівні кути при вершинах A і C). З подібності випливає: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$ або $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.

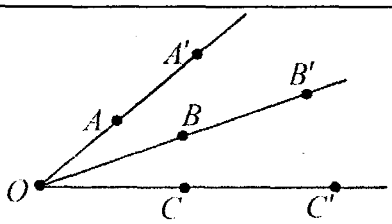


$CD^2 = AD \cdot DB$

4. CD – бісектриса кута C. Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$ або $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$.



Задача 1. Дано: точка A і центр гомотетії O. Побудувати точки, у які перейдуть дані точки A, B і C при гомотетії з центром O і коефіцієнтом гомотетії, який дорівнює 2.



Розв'язання.

$OA' = 2OA$

$OB' = 2OB$

$OC' = 2OC$

Задача 2. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні; $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 6$ см. $BC : B_1C_1 = 3$. Знайти: AB, AC і BC.

Розв'язання.

$\frac{BC}{B_1C_1} = 3$ (за умовою), тоді $BC = 3 \cdot B_1C_1 = 3 \cdot 5 = 15(см)$;

$AC = 3 \cdot A_1C_1 = 3 \cdot 6 = 18(см)$;

$AB = 3 \cdot A_1B_1 = 3 \cdot 4 = 12(см)$.

Відповідь: $BC = 15$ см, $AC = 18$ см, $AB = 12$ см.

Задача 3. Трикутники ABC і MNP подібні. Знайти кути ΔMNP, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$.

Розв'язання.

У подібних трикутників відповідні кути рівні, отже $\angle A = \angle P = 45°$, $\angle C = \angle M = 75°$, $\angle B = \angle N = 180° - (75° + 45°) = 180° - 120° = 60°$.

Відповідь: $\angle M = 45°$, $\angle N = 60°$, $\angle P = 75°$.

Задача 4. Дано: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см, $P\Delta_{A_1B_1C_1} = 54$ см. Знайти: A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1.

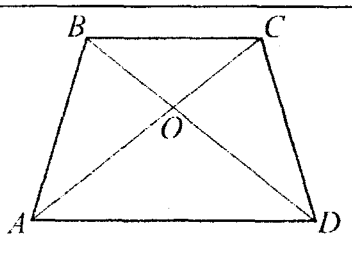
Розв'язання.

$\frac{P\Delta_{ABC}}{P\Delta_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, тоді $AB = kA_1B_1$; звідки $A_1B_1 = \frac{AB}{k}$, аналогічно $B_1C_1 = \frac{BC}{k}$, $A_1C_1 = \frac{AC}{k}$. Знайдемо коефіцієнт подібності: $P_{\Delta ABC} = 9 + 8 + 10 = 27$ см. $k = \frac{27}{54} = \frac{1}{2}$;

отже, $A_1B_1 = 10 : \frac{1}{2} = 10 \cdot 2 = 20(см)$, $B_1C_1 = 9 : \frac{1}{2} = 18(см)$, $A_1C_1 = 8 : \frac{1}{2} = 16(см)$.

Відповідь: $A_1B_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 18$ см, $A_1C_1 = 16$ см.

Задача 5. Дано: $ABCD$ – трапеція.
Довести: $\Delta BOC \backsim \Delta DOA$.

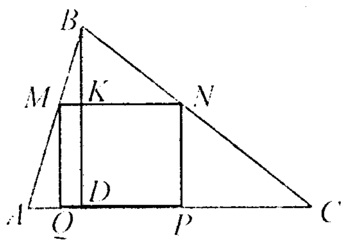


Розв'язання.

1) $\angle CBD = \angle ADB$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ та січній BD);
2) $\angle BCA = \angle DAC$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ та січній AC);
3) $\Delta BOC \backsim \Delta DOA$ (за першою ознакою подібності трикутників)

Відповідь: $\Delta BOC \backsim \Delta DOA$.

Задача 6. Основа трикутника $5\ см$, висота, проведена до цієї основи, дорівнює $3\ см$. В трикутник вписаний квадрат так, що дві його вершини лежать на основі, а дві інші – на бічних сторонах. Обчислити сторону квадрата.



Розв'язання.

$\Delta ABC \backsim \Delta MBN$ (оскільки $MN \parallel AC$),

тоді $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN} = \frac{BD}{BK}$.

Нехай $MN = x\ см$, тоді $BK = (3 - x)\ см$, $AC = 5\ см$.

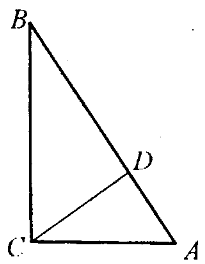
Із подібності трикутників: $\frac{AC}{MN} = \frac{BD}{BK}$;

$\frac{5}{x} = \frac{3}{3-x}$; $5(3-x) = 3x$; $15 - 5x = 3x$; $8x = 15$;

$x = \frac{15}{8}$; $x = 1\frac{7}{8}\ (см)$.

Відповідь: $1\frac{7}{8}\ см$.

Задача 7. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $25\ см$, а один із катетів дорівнює $10\ см$. Знайти проекцію другого катета на гіпотенузу.



Дано: $AB = 25\ см$, $AC = 10\ см$.

Знайти: DB.

Розв'язання.

1) $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (за теоремою Піфагора),

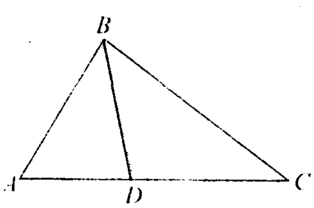
звідки $BC^2 = AB^2 - AC^2$; $CB = \sqrt{25^2 - 10^2} = \sqrt{35 \cdot 15} = 5\sqrt{21}\ (см)$.

2) $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$; $CB^2 = AB \cdot DB$, $DB = CB^2 : AB$.

$DB = \frac{25 \cdot 21}{25} = 21\ (см)$.

Відповідь: $DB = 21\ см$.

Задача 8. Сторони трикутника дорівнюють $15\ см, 20\ см, 28\ см$. Знайти довжини відрізків, на які бісектриса трикутника поділяє його більшу сторону.



Нехай BD – бісектриса кута B. Вона поділяє сторону AC на відрізки AD і DC, які треба знайти. Бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам, тоді $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

Нехай $AD = x\ см$, а $DC = (28 - x)\ см$, отримаємо $\frac{15}{20} = \frac{x}{28 - x}$;

$15(28 - x) = 20x$; $15 \cdot 28 = 15x + 20x$; $35x = 15 \cdot 28$; $x = \frac{15 \cdot 28}{35}$;

$x = 12\ см$, отже, $AD = 12\ (см)$, а $DC = 28 - 12 = 16\ (см)$.

Відповідь: $AD = 12\ см$, $DC = 16\ см$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Дано: точка A і центр гомотетії O. Побудувати точку A_1 при гомотетії з центром O і коефіцієнтом гомотетії, який дорівнює 2.

2. Дан трикутник MNP. Побудувати йому гомотетичний, вибравши за центр гомотетії одну з вершин трикутника, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює $1{,}5$.

3. Дано: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, $BC = 4$ *см*, $AC = 8$ *см*, $A_1B_1 = 3$ *м*, $A_1C_1 = 4$ *м*. Знайти: AB, B_1C_1.

4. Трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$, $AB = 8$ *см*, $BC = 9$ *см*, $AC = 10$ *см*, периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 9 *см*. Знайти сторони трикутника $A_1B_1C_1$.

5. Знайти подібні трикутники і довести їх подібність.

а)

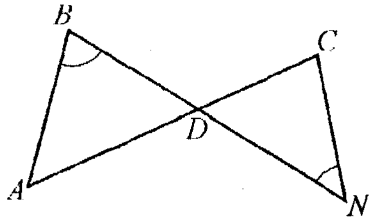


Рис. 1

б)

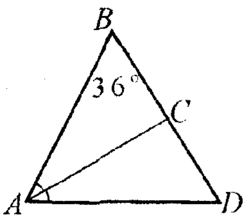


Рис. 2

в)

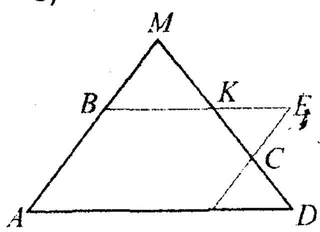


Рис. 3

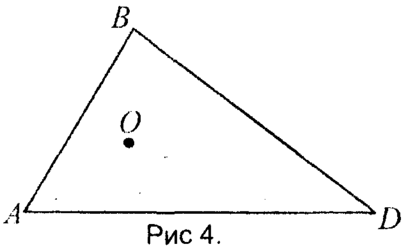


Рис 4.

6. Дан ΔABD і точка O. Побудувати фігуру, в яку при гомотетії з центром O перейде цей трикутник, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює $2{,}5$. (Рис. 4.)

7. Сторони даного трикутника 7 *см*, 5 *см* і 4 *см*. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо менша його сторона $1{,}5$ *см*.

8. Сторони трикутника відносяться як $3:4:6$. Якими будуть сторони подібного йому трикутника з периметром $58{,}5$ *см*?

9. Знайти подібні трикутники і довести їх подібність. (Рис. 5-7).

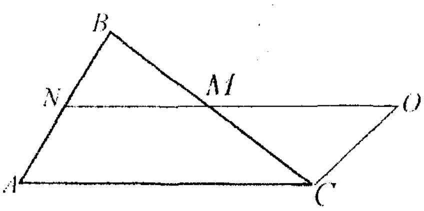


Рис. 5.

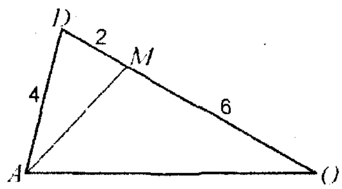


Рис. 6.

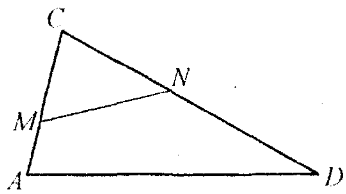


Рис. 7.

Дано: $AC \cdot CM = DC \cdot CN$

10. Два кути трикутника дорівнюють $54°$ і $18°$. Довести, що бісектриса, проведена з вершини третього кута, відсікає трикутник, подібний вихідному.

11. Бічна сторона і основа одного рівнобедреного трикутника дорівнюють 15 *см* і 18 *см*, а основа другого рівнобедреного трикутника і медіана, проведена до цієї основи, дорівнюють відповідно 54 *см* і 36 *см*. Чи подібні трикутники?

12. Дані ΔMKC і точка O. Побудувати фігуру, у яку при гомотетії з центром O перейде цей трикутник, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює $0{,}5$. (Рис. 8.)

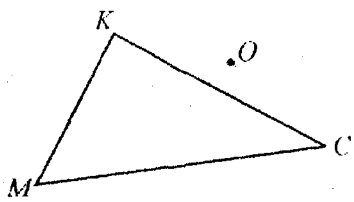
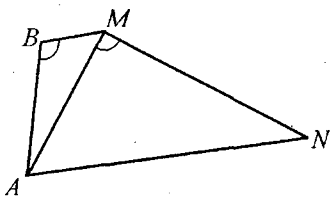


Рис. 8.

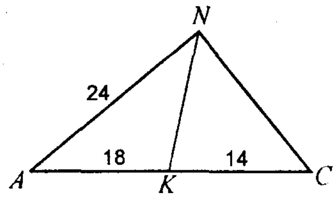
13. Сторони трикутника відносяться як $5:6:8$. Обчислити довжини сторін трикутника, подібного даному, якщо різниця між більшою і меншою його сторонами дорівнює 15 *см*.

14. Кути трикутника відносяться як $6:3:1$. Довести, що бісектриса, проведена з вершини більшого кута, відсікає від цього трикутника трикутник, йому подібний.

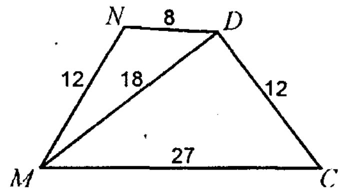
а)



б)



в)



15. Знайти подібні трикутники і довести їх подібність.

16. Довести, що в подібних трикутниках медіани, проведені з відповідних вершин, відносяться як їх відповідні сторони.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-1-1

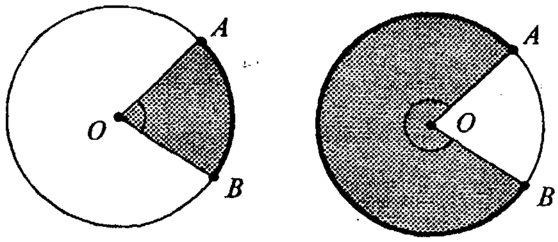
Тема. Подібність фігур

В – І	1 – 6 балів	В – ІІ
1. Дані трикутник ABC і точка O поза ним. Побудувати фігуру, у яку при гомотетії з центром O перейде цей трикутник, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює 2.		1. Побудувати трикутник і йому гомотетичний, прийнявши за центр гомотетії середину однієї з сторін трикутника, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює 2.
2. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Знайти кути $\Delta A_1B_1C_1$, якщо $\angle A = 65°$, $\angle C = 55°$.		2. $\Delta ABC \backsim \Delta MND$. Знайти невідомі сторони ΔMND, якщо $AB = 10$ *см*, $BC = 14$ *см*, $AC = 16$ *см*, $MD = 8$ *см*.
В – ІІІ	**7 – 9 балів**	**В – IV**
1. Накреслити ромб. Побудувати йому гомотетичний, прийнявши за центр гомотетії одну з вершин ромба; коефіцієнт гомотетії дорівнює $\frac{1}{2}$.		1. Накреслити паралелограм. Побудувати йому гомотетичний, прийнявши за центр гомотетії точку перетину діагоналей; коефіцієнт гомотетії $1,5$.
2. Периметри двох подібних трикутників дорівнюють 25 *см* і 75 *см*. Сума двох відповідних сторін даних трикутників дорівнює 16 *см*. Знайти ці сторони.		2. Сторони трикутника дорівнюють 3 *см*, 5 *см* і 7 *см*, а периметр подібного йому трикутника складає $\frac{1}{3}$ периметра даного трикутника. Знайти сторони подібного трикутника.
3. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює $36°$, а гострі кути другого прямокутного трикутника відносяться як $2:3$. Чи подібні трикутники?		3. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює $54°$, а різниця гострих кутів другого прямокутного трикутника дорівнює $18°$. Чи подібні трикутники?
В – V	**10 – 12 балів**	**В – VI**
1. Кути одного трикутника відносяться як $2:3:4$. Один з кутів другого трикутника на $20°$ більше другого кута і на $20°$ менше третього кута. Чи подібні трикутники?		1. Кути одного трикутника відносяться, як $5:6:7$. Один з кутів другого трикутника на $10°$ більше другого кута і на $10°$ менше третього кута. Чи подібні трикутники?
2. Сторони трикутника дорівнюють 6 *см*, 7 *см* і 8 *см*. Знайти сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 84 *см*.		2. Відповідні сторони двох подібних трикутників дорівнюють 24 *см* і 8 *см*, а різниця їх периметрів 80 *см*. Знайти периметри цих трикутників.
3. Довести, що висоти подібних трикутників відносяться як відповідні сторони.		3. Через вершину трикутника проведені прямі, паралельні протилежним сторонам, до їх взаємного перетину. Довести, що утворений трикутник подібний даному.

Кути, вписані в коло

Центральним кутом в колі називається плоский кут з вершиною в його центрі. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається вписаним в коло.

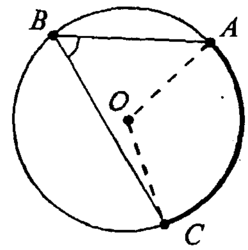
Кути у колі



$\angle AOB$ – центральний кут.

$\angle AOB = \cup AB$.

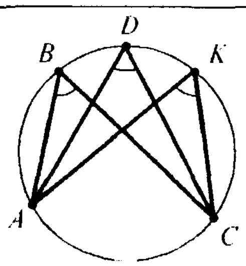
Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається.



$\angle ABC$ – вписаний кут.

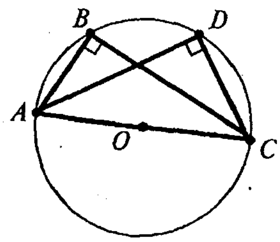
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC.$$

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу.



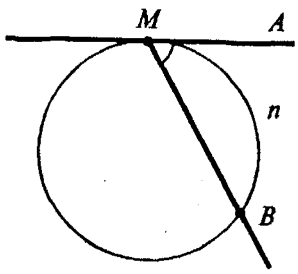
$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$.

Вписані кути, які спираються на ту саму дугу, рівні між собою.



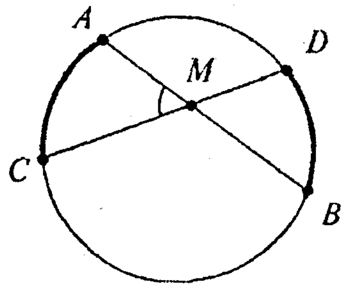
$\angle ABC = \angle ADC = 90°$.

Вписаний кут, який спирається на діаметр, дорівнює $90°$.



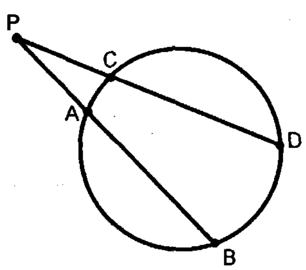
MA – дотична, MB – січна.

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB.$$



AB і CD – хорди.

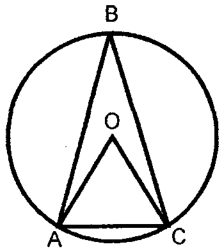
$$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB).$$



$AP \cdot BP = CP \cdot DP$

Задача 1. Точки A, B, C лежать на колі. Чому дорівнює $\angle ABC$, якщо хорда AC дорівнює радіусу кола?

Випадок 1.



Хорда AC і вершина вписаного кута лежать по різні сторони від центра кола, тоді

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

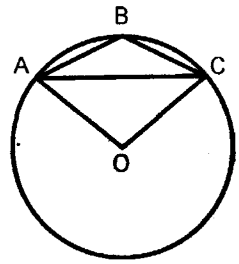
$$AC = AO = OC = R,$$

тоді ΔAOC – рівносторонній і

$$\angle AOC = 60°, \ \angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°.$$

Відповідь: $\angle ABC = 30°$.

Випадок 2.

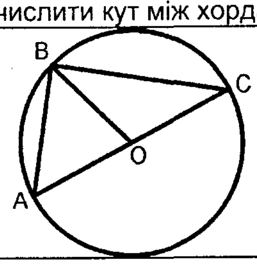


$$\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC.$$

$$\angle AOC = 180° - 30° = 150°.$$

Відповідь: $30°; 150°$.

Задача 2. Із точки кола проведені дві хорди. Одна з них стягує дугу в $100°$, друга – $80°$. Обчислити кут між хордами.

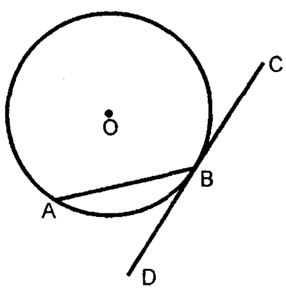


Розв'язання.

$\cup BC = 100°$, $\cup AB = 80°$. $\angle BAC$ – вписаний, $\angle BOC$ – центральний і $\angle BOC = 100°$, тоді $\angle BAC = 50°$. $\angle BCA$ — вписаний, $\angle BOA$ – центральний, тоді $\angle BCA = 40°$. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, тому $\angle ABC = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - (40° + 50°) = 90°$.

Відповідь: $\angle ABC = 90°$.

Задача 3. Хорда стягує дугу в $80°$. Знайти гострий кут, утворений цією хордою та дотичною до кола в кінці хорди.



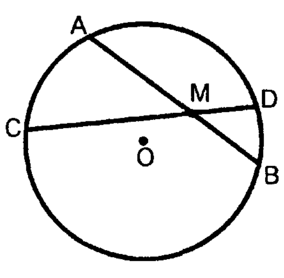
Розв'язання

Нехай AB – хорда, $\cup AB = 80°$, CD – дотична, тоді

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AB = \frac{1}{2}\cdot 80° = 40°.$$

Відповідь: $\angle ABD = 40°$.

Задача 4. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. Хорда $AB = 24$ *см*, $DM = 8$ *см*, $CM = 10$ *см*. Знайти AM і MB.



Розв'язання.

Нехай $AM = x$ *см*, $MB = (24 - x)$ *см*.

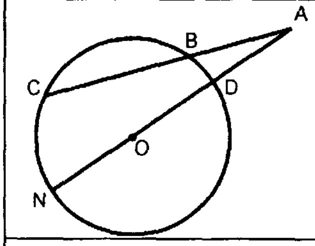
$AM \cdot MB = CM \cdot MB$, тоді $(24 - x)\cdot x = 10\cdot 8$, $x^2 - 24x + 80 = 0$.

$D = 144 - 80 = 64$; $x = 12 \pm 8$; $x_1 = 20$; $x_2 = 4$;

$24 - 20 = 4(см)$, $24 - 4 = 20(см)$.

Відповідь: $AM = 4$ *см*; $MB = 20$ *см*.

Задача 5. Із точки поза колом проведена січна, яка перетинає коло у двох точках, віддалених від даної точки на $8\ см$ і $15\ см$. Відстань від даної точки до центра кола дорівнює $13\ см$. Обчислити радіус кола.



Розв'язання.

Нехай $AB = 8\ см$, $AC = 18\ см$, $AO = 13\ см$, $ON = x\ см$, тоді $AN = (13 + x) см$, $AD = (13 - x) см$, оскільки $AD \cdot AN = AB \cdot AC$, одержимо $(13 - x)(13 + x) = 15 \cdot 8$, $169 - x^2 = 120$; $x^2 = 49, x > 0$ за змістом задачі, то $x = 7$, тобто, $NO = 7 см$.

Відповідь: радіус кола дорівнює $7 см$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

17. $\angle B = 90°$, $AB = 5\ см$, $AC = 13\ см$.

Знайти: AD.

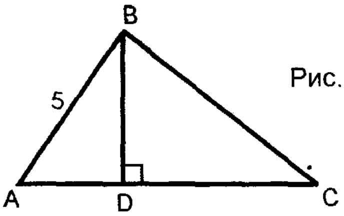


Рис. 1.

18. $CD \perp AB$.

Знайти: CD.

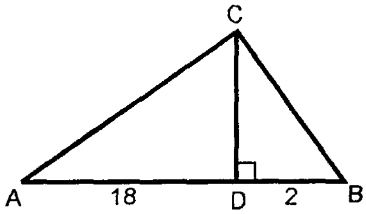


Рис. 2.

19. Довести, що $\Delta ABC \backsim \Delta DFE$.

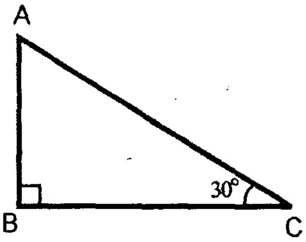
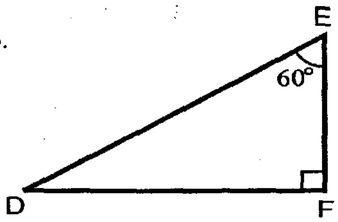


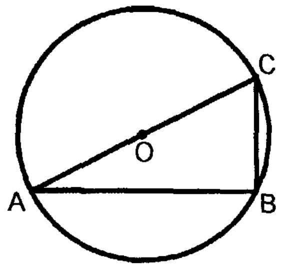
Рис. 3.



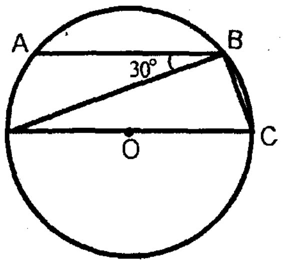
20. У трикутнику зі сторонами $15\ см$ і $20\ см$ проведена бісектриса кута між даними сторонами. Вона поділяє третю сторону на відрізки, менший із яких дорівнює $6\ см$. Знайти більший відрізок.

21. Знайти: $\angle ABC$.

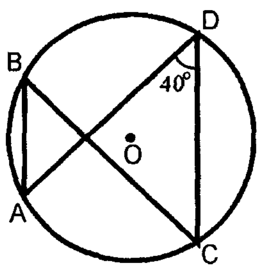
а)



б)



в)



22. Відстані від точки кола до кінців його діаметра дорівнюють $8\ см$ і $6\ см$. Знайти радіус кола.

23. Хорди AB і CD перетинаються в точці S. Хорда $AB = 10\ см$, $CS = 3\ см$, $CD = 8\ см$. Знайти AS, BS.

24. $CD = DA = 10$ *см* Знайти: BD, AB. (Рис. 1.) 25. $BD = 20$ *см*. Знайти: BC, CD. (Рис. 2.)

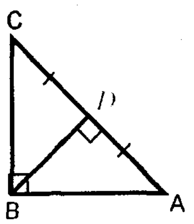


Рис. 1.

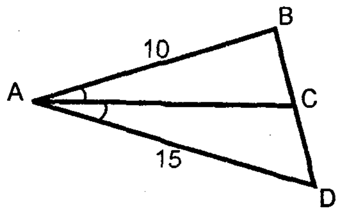


Рис. 2.

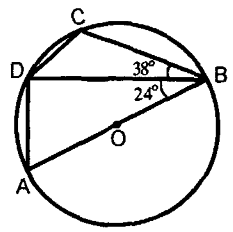


Рис. 3.

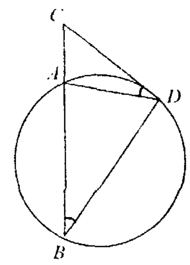


Рис. 4.

26. За даними рисунка знайти $\angle CDB$. (O – центр кола). (Рис. 3.)

27. Катети одного прямокутного трикутника дорівнюють 15 *см* і 20 *см*, а гіпотенуза і висота, проведена до гіпотенузи другого прямокутного трикутника, відповідно дорівнюють 75 *см* і 36 *см*. Чи подібні трикутники?

28. Із точки кола проведені дві рівні хорди довжиною $12\sqrt{2}$*см* кожна. Одна з хорд стягує дугу, яка дорівнює $90°$. Знайти радіус кола.

29. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відносяться як $4:5$, а бісектриса одного з гострих кутів поділяє другий катет на відрізки, різниця між якими 2 *см*. Обчислити периметр прямокутника.

30. Хорди кола AC і BD перетинаються. Знайти $\angle ABC$, якщо $\angle DAC = 60°$, $\angle DCA = 70°$.

31. Перпендикуляр, опущений з точки кола на діаметр, поділяє його на відрізки, різниця між якими 7 *см*. Знайти відстань від цієї точки до кінців діаметра, якщо довжина перпендикуляра 12 *см*.

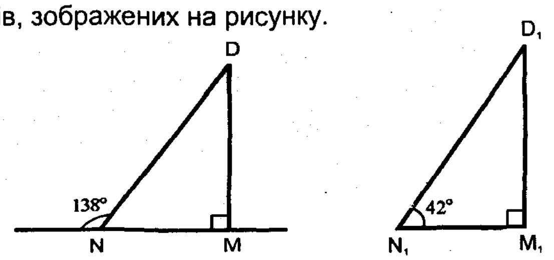
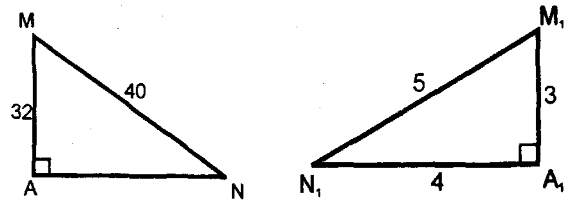
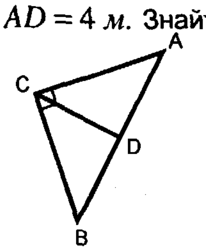
32. Із точки поза колом проведені січна та дотична. Різниця внутрішньої і зовнішньої частин січної дорівнює 2 *см*, а дотична дорівнює 12 *см*. Обчислити довжину січної.

33. Довести, що добуток відрізків січної кола дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї ж точки. (Рис. 4.)

34. Точки кола поділяють його на дуги, які відносяться як $5:6:7$. Визначити кути трикутника з вершинами в цих точках.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-1-2

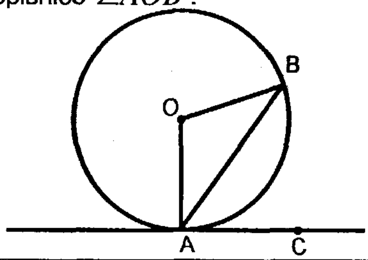
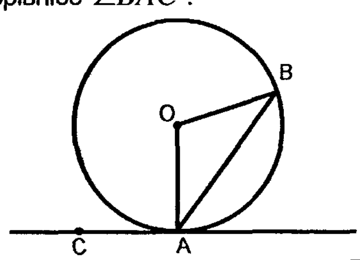
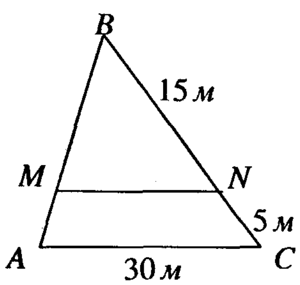
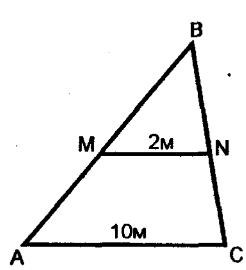
1 – 6 балів

В – І	В – ІІ
1. Довести подібність прямокутних трикутників, зображених на рисунку. 	1. Чи подібні трикутники, зображені на рисунку? 
2. Сторони трикутника 30 *см*, 40 *см* і 56 *см*. Знайти довжини відрізків, на які поділяє бісектриса трикутника більшу сторону.	2. Дано: $\Delta ABC, \angle C = 90°$, $CD \perp AB$, $CD = 3$ *м*; $AD = 4$ *м*. Знайти: BD. 

В – III	7 – 9 балів	В – IV
1. При перетині двох хорд у колі одна з них поділяється на відрізки $2\ см$ і $18\ см$, а друга — навпіл. Знайти довжину другої хорди.		1. При перетині двох хорд одна з них поділяється на відрізки $12\ см$ і $8\ см$, а друга на частини, які відносяться як $2:3$. Знайти довжину другої хорди.
2. Кути трикутника ABC, вписаного в коло, дорівнюють: $\angle A = 45°$, $\angle B = 65°$. Знайти кут ADB, якщо точка D належить дузі AB.		2. Три точки, які належать колу, поділяють його на дуги, градусні міри яких відносяться як $3:4:5$. Знайти кути трикутника, вершинами якого є ці точки.
3. Відстань від точки поза колом до центра дорівнює $13\ см$, а до кола – $8\ см$. Обчислити довжину дотичної, проведеної з цієї точки до кола.		3. Із точки поза колом провели дотичну довжиною $12\ см$. Знайти відстань від цієї точки до кола, якщо радіус кола $5\ см$.

В – V	12 балів	В – VI
1. Катети прямокутного трикутника відносяться як $3:4$, а бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки, різниця між якими дорівнює $15\ см$. Обчислити периметр трикутника.		1. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки $75\ см$ і $100\ см$. Обчислити довжину відрізків гіпотенузи, на які поділяє висота прямого кута, проведена до гіпотенузи.
2. Точки кола поділяють його на частини, які відносяться як $7:8:9$. Обчислити кути трикутника з вершинами в цих точках.		2. Точки кола поділяють його на частини, які відносяться як $3:2:5:8$. Визначити кути, утворені радіусами, проведеними до точок дотику.

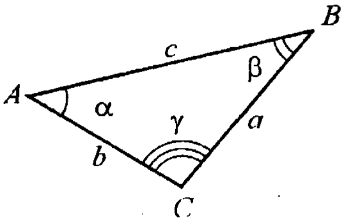
КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-1
Тема. Подібність фігур

В – I	1 – 7 балів	В – II
1. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці S. $AS = 5см$, $SB = 3см$, $CS:SD = 2:6$. Знайти CS і SD.		1. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M. $CM = 4см$, $CD = 16см$, $AM:MB = 3:4$. Знайти AM і MB.
2. AC – дотична, AB – хорда, $\angle BAC = 65°$. Чому дорівнює $\angle AOB$? 		2. AC – дотична, AB – хорда, $\angle AOB = 80°$. Чому дорівнює $\angle BAC$? 
3. $MN \parallel AC$. Знайти: MN. 		3. $MN \parallel AC$, $AB = 20\ м$. Знайти: AM. 
4. Сторони одного трикутника відносяться як $5:4:6$, а сторони другого трикутника дорівнюють $25\ см$, $20\ см$ і $30\ см$. Чи подібні трикутники?		4. Сторони одного трикутника відносяться як $5:6:7$, а сторони другого трикутника дорівнюють $20\ см$, $24\ см$ і $28\ см$. Чи подібні трикутники?

B – III	9 балів	B – IV
1. У прямокутний ΔABC вписаний квадрат $CMNP$ так, що кут C у них спільний, а вершина N лежить на гіпотенузі AB. Знайти сторону квадрата, якщо $AB = 13$ *см*, $AC = 5$ *см*.		1. У прямокутний ΔABC вписаний прямокутник $CMNP$ так, що кут C у них спільний, а вершина N лежить на гіпотенузі. Знайти сторони прямокутника, якщо $BC = 9$ *см*, $AC = 6$ *см*.
2. Із точки A даного кола проведені хорди: AB, яка дорівнює діаметру, і AC, яка дорівнює радіусу. Визначити кути ΔABC.		2. Точки A, B, C лежать на колі з центром O. Точки B і O лежать по різні сторони від прямої AC. Чому дорівнює кут ABC, якщо хорда AC дорівнює радіусу?
3. Відстані від точки кола до кінців діаметра дорівнюють 15 *см* і 20 *см*. Знайти відстань від цієї точки до діаметра.		3. Відстань від точки кола до діаметра дорівнює 12 *см*. Знайти відстань від цієї точки до кінців діаметра, довжина діаметра дорівнює 25 *см*.
B – V	**12 балів**	**B – VI**
1. Точка M віддалена від центра кола на 8 *см*, а хорду, яка проходить через точку M, поділяє на частини 2 *см* і 18 *см*. Знайти діаметр кола.		1. Через точку N, віддалену від центра на 14 *см*, проведена хорда довжиною 36 *см*. Знайти відрізки, на які точка N поділяє дану хорду, якщо радіус кола дорівнює 22 *см*.
2. У прямокутний ΔABC вписаний прямокутник $CDMN$ так, що $\angle C$ в них спільний, а вершина M лежить на гіпотенузі AB. Знайти сторони прямокутника, якщо $AB = 13$ *м*, $BC = 5$ *м*, а сторона MD в 3 рази більше CD.		2. У рівнобедрений ΔABC з основою AC і висотою BD вписаний квадрат $MNPO$ так, що сторона MO належить основі, а вершини N і P – сторонам AB і BC. Знайти сторону квадрата, якщо $AC = 12$ *см*, $BD = 14$ *см*.
3. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки 15 *см* і 20 *см*. Знайти катети прямокутного трикутника.		3. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки 20 *см* і 16 *см*. Знайти гіпотенузу і катети прямокутного трикутника.

§2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Співвідношення між сторонами і кутами у довільному трикутнику



Теорема синусів

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R}$$

R – радіус описаного кола

Теорема косинусів

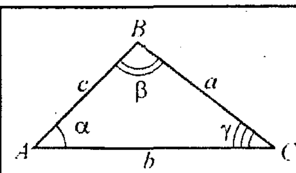
$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$$

Наслідки

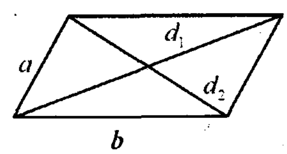
1. Якщо $c^2=a^2+b^2$, то $\gamma=90^0$, тобто трикутник прямокутний (теорема, обернена теоремі Піфагора).
2. Якщо $c^2<a^2+b^2$, то кут γ – гострий $(\cos\gamma>0)$; якщо c – найбільша сторона, то трикутник гострокутний.
3. Якщо $c^2>a^2+b^2$, то кут γ – тупий $(\cos\gamma<0)$.
4. У трикутнику супротив більшої сторони лежить більший кут, супротив більшого кута лежить більша сторона: $a>b \Leftrightarrow \alpha>\beta$.

Розв'язування трикутників

Розв'язуванням трикутників є знайдення невідомих сторін і кутів трикутника за відомими його кутами і сторонами. Сторони позначають a, b, c, а протилежні кути α, β, γ.



Примітка. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.



$$d_1^2+d_1^2=2a^2-2b^2$$

1. Дано: у ΔABC $AB = 2$ *см*, $AC = 3$ *см*, $\angle BAC = 60°$.

Знайти: BC.

Розв'язання.

За теоремою косинусів:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos 60° = 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cos 60° = 13 - 2\cdot 2\cdot 3\frac{1}{2} = 13 - 6 = 7.$$

Відповідь: $BC = \sqrt{7}$ (*см*).

2. Дано: у ΔABC $AB = 7$ *см*, $BC = 5$ *см*, $AC = 6$ *см*.

Знайти: $\cos A$.

Розв'язання.

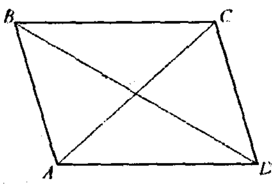
За теоремою косинусів: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A$, звідки:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2\cdot 7\cdot 6} = \frac{60}{2\cdot 6\cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Відповідь: $\cos\angle A = \frac{5}{7}$.

3. Дано паралелограм зі сторонами $\sqrt{10}$ *см* і $\sqrt{30}$ *см*. Одна із діагоналей паралелограма вдвічі довше другої. Знайти довжини діагоналей паралелограма.

Розв'язання.



Нехай $AB = DC = \sqrt{10}$ *см*, $BC = AD = \sqrt{30}$ *см*, тоді DB у два рази довше AC (за умовою), тобто $AC = x$ *см*; $BD = 2x$ *см*.

$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right)$ – властивість діагоналей і сторін паралелограма. Маємо: $x^2 + 4x^2 = 2\left(\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{30}\right)^2\right)$; $5x^2 = 2\cdot 40$;

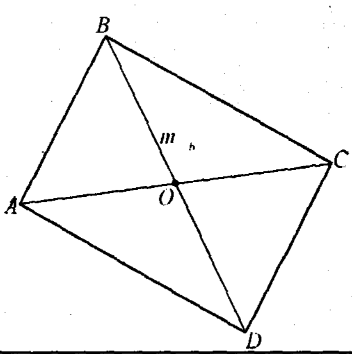
$5x^2 = 80$; $x^2 = 16$; $x > 0$ (за змістом задачі), тоді $x = 4$, тобто $AC = 4$ *см*, $BD = 8$ *см*.

Відповідь: $AC = 4$ *см*, $BD = 8$ *см*.

4. Дано: у ΔABC, a, b, c – сторони.

Знайти: медіану, проведену до сторони b.

Розв'язання.



Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, BO – медіана, $BC = m_b$.

Добудуємо ΔABC до паралелограма, тоді

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

$$b^2 + (2m_b)^2 = 2c^2 + 2a^2,$$

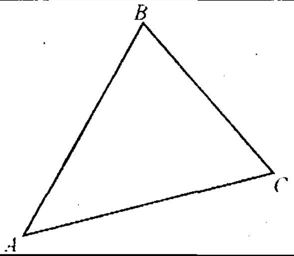
$$b^2 + 2m_b^2 = 2c^2 + 2a^2,\ 4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$

$$m_b = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}}.$$

Відповідь: $BO = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2}$.

5. Дано: у ΔABC $BC = 20$ $см$, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.

Знайти: AC.



Розв'язання.

За теоремою синусів $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$;

$$AC = \frac{BC\sin B}{\sin A} = \frac{20\sin 60^0}{\sin 75^0} = \frac{20\cdot 0{,}866}{0{,}9659} \approx 17{,}93(см);$$

$AC = 17{,}9$ $см$.

Відповідь: $AC = 17{,}9$ $см$.

6. Сторона трикутника 9 $см$, а протилежний їй кут дорівнює 30°.

Знайти: радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

Розв'язання.

За теоремою синусів: $\dfrac{9}{\sin 30^\circ} = 2R$; $R = \dfrac{9}{2\sin 30^\circ} = 9 : \left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right) = 9(см)$.

Відповідь: 9 $см$

7. Дано сторону і два кути трикутника. Знайти третій кут і дві інші сторони.

Дано: a, α, β.

Знайти: b, c, γ.

Розв'язання.

1) $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; 2) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$; $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Відповідь: $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

8. Дано дві сторони трикутника і кут між ними. Знайти інші два кути і третю сторону.

Дано: a, b, γ.

Знайти: c, α, β.

Розв'язання.

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (за теоремою косинусів), $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$,

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, звідси $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

3) $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$ або, знайшовши сторону c, можна знайти кути α і β, використовуючи теорему синусів: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{c}$; $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$; $\sin\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{c}$.

Відповідь: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$.

9. У трикутнику дані дві сторони і кут, протилежний одній із них. Знайти інші кути і сторону трикутника.

Дано: a, b, α.

Знайти: c, β, γ.

Розв'язання.

За теоремою синусів: 1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, звідси $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$; 2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;

3) $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Ця задача відрізняється від попередніх тим, що може мати два розв'язки; при $\alpha \ge 90°$ задача може мати лише один розв'язок або взагалі не мати розв'язків.

Відповідь: $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

10. Дані три сторони трикутника. Знайти його кути.

Дано: a, b, c.

Знайти: α, β, γ.

Розв'язання.

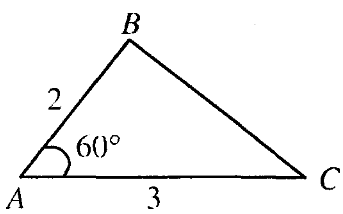
1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

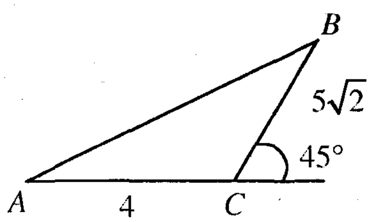
Відповідь: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

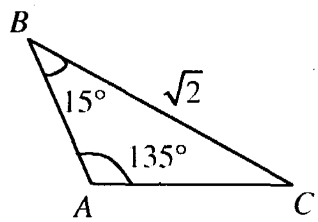
1. Знайти: BC.



2. Знайти: AB.



3. Знайти: AB.



4. У ΔABC $\angle A = 23°$, $\angle B = 77°$, $BC = 4\,см$. Знайти AC.

5. Визначити вид трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють $3\,см$, $4\,см$, $5\,см$.

6. У ΔABC $\angle A = 59°$, $\angle C = 60°$. Яка сторона трикутника найбільша, яка найменша?

7. У ΔABC $BC = 3\sqrt{2}\,см$, $AC = 6\,см$, $\angle C = 135°$. Знайти: AB.

8. Сторона трикутника дорівнює $10\sqrt{2}\,см$, а протилежний їй кут дорівнює $45°$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

9. Діагоналі паралелограма дорівнюють $7\,см$ і $11\,см$, а сторони відносяться як $6:7$. Знайти сторони паралелограма.

10. Чи існує трикутник зі сторонами $a = 5\sqrt{7}\,см$, $b = 4\,см$, якщо $\sin\beta = 0,7$?

11. У ΔABC $\angle C = 120°$, $\angle B = 45°$, $BC = 2\,см$. Знайти довжину сторони AC.

12. У прямокутного трикутника гіпотенуза c, а один із гострих кутів α. Визначити бісектрису прямого кута.

13. На сторонах кута, який дорівнює $45°$, позначені дві точки, віддалені від його вершини на $17\,см$ і $12\sqrt{2}\,см$. Знайти відстань між цими точками.

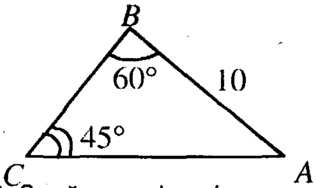
14. Діагоналі паралелограма $19\,см$ і $23\,см$, його периметр $P=58\,см$. Обчислити сторони паралелограма.

15. У трикутнику медіана, проведена до основи, довжина якої $20\,см$, дорівнює $16\,см$. Знайти меншу сторону трикутника, якщо його бічні сторони відносяться як $3:5$.

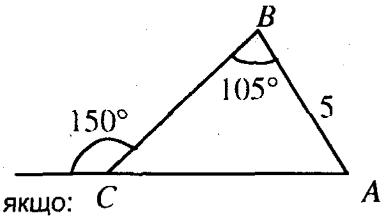
16. З точки кола проведені хорди довжиною $5\,см$ і $8\,см$. Кінці цих хорд з'єднані відрізком, який стягує дугу в $120°$. Визначити довжину цього відрізка, якщо відрізок і точка лежать по різні сторони від центра кола.

17. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює $6\sqrt{3}\,см$ і лежить супротив кута $60°$. Обчислити радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

18. Розв'язати трикутник.



19. Розв'язати трикутник.



20. Знайти невідомі сторони і кути трикутника, якщо:

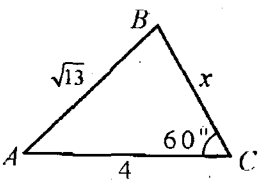
а) $a=6;\ \beta=30°;\ \gamma=45°$; б) $a=7;\ b=23;\ \gamma=130°$;

в) $a=27;\ b=9;\ \gamma=138°$; г) $a=7;\ b=2;\ c=8$.

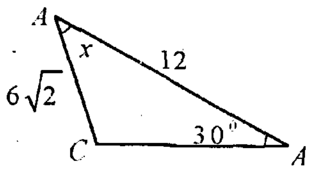
Примітка. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha;\ \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$.

21. Знайти x.

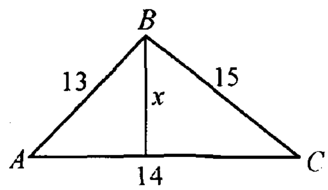
а)



б)



в)



22. У трикутнику сторона дорівнює $12\,см$, а два прилеглих до неї кута $72°$ і $48°$. Знайти радіус описаного кола.

23. Знайти сторони рівнобедреного трикутника, якщо кут між рівними сторонами дорівнює $120°$, а сума двох нерівних сторін $60\,см$.

24. У паралелограмі діагональ дорівнює $10\,см$ і складає з нерівними сторонами кути $\alpha=72°3'$ і $\beta=30°$. Знайти периметр паралелограма.

25. а) Дано: $a=10,\ \alpha=40°,\ \beta=60°$; Знайти: c, b, γ;

б) Дано: $a=55,\ b=21,\ c=38$; Знайти: α,β,γ;

в) Дано: $a=34,\ b=12,\ \alpha=164°$; Знайти: c,γ,β;

г) Дано: $a=32,\ c=23,\ \beta=152°$; Знайти: b,α,γ.

26. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює $8\,см$, діагональ утворює з більшою основою і бічною стороною кути $50°$ і $36°$. Знайти інші сторони трапеції.

27. Діагональ чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює $12\sqrt{2}\,см$ і утворює з сусідніми сторонами кути $30°$ і $45°$. Один з кутів, протилежний діагоналі, дорівнює $120°$. Знайти сторони чотирикутника.

28. Із трьох стержнів $2\,м$, $0{,}8\,м$ і $1{,}6\,м$ потрібно виготовити трикутну конструкцію (зварити їх кінці). а) чи можна це зробити? б) визначити вид трикутника; в) під яким кутом їх потрібно розташувати?

29. Дано: $a=18, b=24, c=13$. Знайти: α,β,γ.

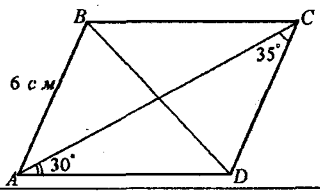
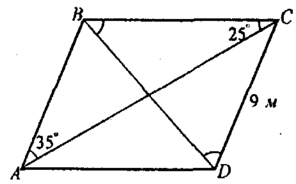
30. Діагональ паралелограма поділяє його кут на частини, які дорівнюють $30°$ і $45°$. Знайти відношення сторін паралелограма.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-2-1

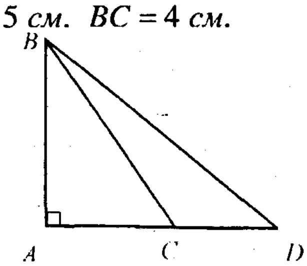
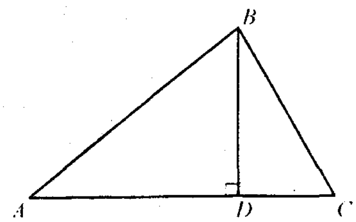
1 – 7 балів

В – I	В – II
1. У трикутнику дві сторони дорівнюють $6\ м$ і $3\sqrt{2}\ м$, а кут між ними $45°$. Знайти третю сторону.	1. У трикутника дві сторони дорівнюють $5\ дм$ і $4\ дм$, а кут між ними $120°$. Знайти третю сторону.
2. У ΔABC $\angle B = 70°$, а кут $C = 65°$. Яка сторона найбільша, а яка найменша?	2. У ΔABC $AC = 8\ дм$, $BC = 11\ дм$. Чи може $\sin B$ дорівнювати $0,75$?
3. У ΔABC $AB = 10\ см$, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$. Знайти: BC.	3. У ΔABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, $AB = 8\ см$. Знайти: AC і BC.

8-9 балів

В – III	В – IV
1. Дано: $ABCD$ – паралелограм, $AB = 6\ см$. Знайти: AC, BD. 	1. Дано: $ABCD$ – паралелограм, $CD = 9\ см$. Знайти: AC, BD. 
2. Діагоналі паралелограма дорівнюють $15\ см$ і $10\ см$, а різниця сторін дорівнює $6\ см$. Знайти сторони паралелограма.	2. Знайти діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як $3:5$, а довжини його сторін дорівнюють $8\ см$ і $19\ см$.
3. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює $8\ см$ і лежить супротив кута $45°$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.	3. Сторони трикутника $5\ м$, $6\ м$, $7\ м$. Знайти висоту трикутника, опущену на сторону довжиною $6\ м$.

10–12 балів

В – V	В – VI
1. Дано: $BD = 5\ см$. $BC = 4\ см$. $DC = 2\ см$. Знайти: AB. 	1. Дано: $AB = 8\ см$, $AC = 7\ см$, $BC = 5\ см$. Знайти: BD. 
2. В гострокутному ΔABC сторона $AB = c$, а прилеглі до неї кути A і B відповідно дорівнюють α і β. Визначити проекцію сторони BC на сторону AB.	2. В гострокутному ΔABC сторона $AB = c$, а прилеглі до неї кути A і B відповідно дорівнюють α і β. Визначити проекцію сторони AC на сторону AB.
3. У трикутнику дві сторони дорівнюють $18\ см$ і $14\ см$, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює $8\ см$. Знайти третю сторону.	3. У трикутнику основа дорівнює $26\ см$, до неї проведена медіана, довжина якої $16\ см$. Визначити довжини сторін трикутника, якщо бічні сторони відносяться як $6:10$.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-2-2

1–7 балів

В – І	В – ІІ
1. Знайти невідомі сторони і кути трикутника. а) $b=8$ *см*, $\beta=48°$, $\gamma=56°$; б) $c=4$ *см*, $a=5$ *см*, $b=6$ *см*.	1. Знайти невідомі сторони і кути трикутника. а) $b=12$ *см*, $\alpha=58°$, $\beta=73°$; б) $a=4$ *см*, $b=6$ *см*, $c=3$ *см*.
2. В ΔABC $AB=BC$, $\angle B=25°$, BD – його бісектриса. Яка сторона більше: AC чи BD?	2. В ΔABC $\angle A=70°$, $\angle B=30°$, AD – його бісектриса $\angle A$. Яка сторона більше: AB чи AD?

8 – 9 балів

В – ІІІ	В – IV
1. У ΔABC $AB=BC=8$ *см*, $\angle B=50°$. Знайти: а) сторону AC; б) висоту CD; в) медіану CM; г) бісектрису BK; д) радіус описаного кола.	1. У ΔABC $AC=CB=12$ *см*, $\angle A=80°$. Знайти: а) сторону AB; б) висоту AK; в) медіану BM; г) бісектрису AD; д) радіус описаного кола.
2. Знайти невідомі сторони і кути ΔABC, якщо $AB=9$ *см*, $BC=10$ *см*, $\angle A=110°$.	2. Знайти невідомі сторони і кути ΔABC, якщо $AC=10$ *см*, $AB=10$ *см*, $\angle A=145°$.

10–12 балів

В – V	В – VI
1. В рівнобічній трапеції $ABCD$ $(BC\parallel AD)$ $AB=CD=6$*см*, кут при більшій основі дорівнює $70°$, а діагональ утворить з більшою основою кут $45°$. Знайти: а) діагональ AC; б) підстави трапеції; в) радіус кола описаного навколо ΔABC.	1. В рівнобічній трапеції $ABCD$ $(BC\parallel AD)$ діагональ дорівнює 12*см*, $\angle A=80°$. Знайти: а) сторону CD; б) сторону AD; в) радіус кола, описаного навколо ΔABC, якщо $\angle CAD=45°$,
2. Розв'язати ΔABC, якщо $AB=7\sqrt{3}$ *см*, $BC=2$ *см*, $\angle B=150°$.	2. Розв'язати ΔABC, якщо $BC=6\sqrt{2}$ *см*, $AC=2$ *см*, $\angle C=135°$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-2

1–7 балів

В – І	В – ІІ
1. Розв'язати ΔABC, якщо $BC=7$ *см*, $\angle A=41°$, $\angle C=69°$.	1. Розв'язати ΔABC, якщо $BC=4$ *см*, $AC=8$ *см*, $\angle C=54°$.
2. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 *см* і 10 *см*, а кут між ними $60°$. Знайти периметр паралелограма.	2. Сторони паралелограма дорівнюють 5 *см* і 8 *см*, а кут між ними $60°$. Знайти діагоналі паралелограма.
3. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює $62°$, а радіус описаного кола дорівнює 8 *см*. Знайти бічні сторони трикутника.	3. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині $62°$, а бічна сторона дорівнює 4 *см*. Знайти радіус описаного кола.

8–9 балів

В – ІІІ	В – IV
1. Розв'язати ΔABC, якщо $AB=5$ *см*, $BC=7$ *см*, $AC=9$ *см*.	1. Розв'язати ΔABC, якщо $AB=10$ *см*, $AC=8$ *см*, $\angle A=110°$.
2. В рівнобічній трапеції діагональ утворює з більшою основою і бічною стороною кути $32°$ і $54°$, менша основа трапеції дорівнює 10 *см*. Знайти сторони трапеції.	2. В рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює $80°$, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайти сторони трапеції, якщо більша основа дорівнює 12 *см*.
3. У трикутнику дві сторони дорівнюють 11 *см* і 23 *см*. Медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 10 *см*. Знайти третю сторону.	3. У трикутнику дві сторони дорівнюють 7*см* і 9 *см*. Медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 7*см*. Знайти третю сторону.

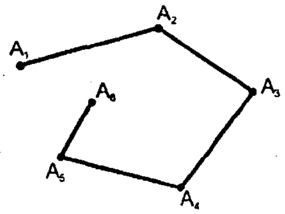
10–12 балів

В – V	В – VI
1. У трикутнику дані сторона і два кути. Знайти третій кут і дві інші сторони, якщо $a=4$; $\alpha=23°$; $\beta=77°$.	1. У трикутнику дані дві сторони і кут, протилежний одній з них. Знайти інші два кути і сторону трикутника, якщо $a=8$; $b=7$; $\alpha=39°$.
2. Дві сторони трикутника дорівнюють 14 *см* і 22 *см*. Медіана, проведена до третьої сторони, на 16 *см* менше цієї сторони. Знайти третю сторону.	2. Дві сторони трикутника дорівнюють 11 *см* і 23 *см*. Медіана, проведена до третьої сторони, на 20 *см* менше цієї сторони. Знайти третю сторону.
3. Різниця двох сторін трикутника дорівнює 6 *см*. Знайти довжини цих сторін, якщо вони лежать супротив кутів 30° і 45°.	3. Різниця двох сторін трикутника дорівнює 8 *см*. Знайти довжини цих сторін, якщо вони лежать супротив кутів 60° і 45°.
4. Більша основа трапеції, вписаної в коло, дорівнює $12\sqrt{6}$ *см*, а діагональ утворює з бічними сторонами кути 60° і 30°. Знайти бічні сторони трапеції.	4. Діагональ чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює $8\sqrt{2}$ *см* і утворює із сусідніми сторонами кути 30° й 45°. Один з кутів, протилежний цій діагоналі, дорівнює 120°. Знайти сторони чотирикутника.

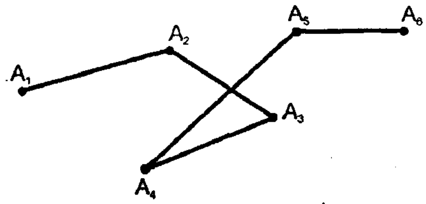
§3. МНОГОКУТНИКИ

Ламана

Ламаною $A_1, A_2, ..., A_n$ називається фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, ..., A_n$ та з'єднуючих їх відрізків $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються вершинами ламаної, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ – ланками ламаної. Ламана називається простою, якщо вона не має самоперетинів.



Проста ламана

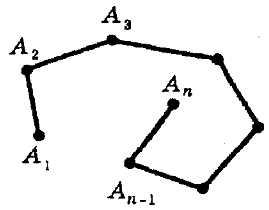


Ламана з самоперетинами

Ламана називається замкнутою, якщо у неї кінці співпадають. Довжиною ламаної називається сума довжин її ланок.

Властивість довжини ламаної

Довжина ламаної не менше довжини відрізка, з'єднуючого її кінці.

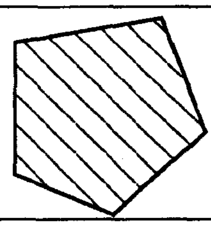


$$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$$

Опуклі многокутники

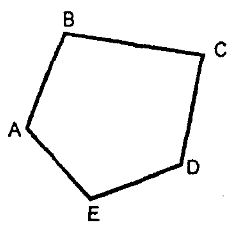
Проста замкнута ламана називається многокутником, якщо її сусідні ланки не лежать на одній прямій. Вершини ламаної називаються вершинами многокутника, а ланки ламаної – сторонами многокутника. Відрізки, які з'єднують несусідні вершини многокутника, називаються діагоналями. Многокутник з n - вершинами, тобто з n,- сторонами, називається n -кутником.

Плоским многокутником, або многокутною областю, називається скінченна частина площини, обмежена многокутником.

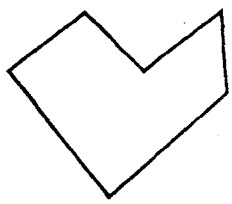


Многокутник називається опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону. При цьому сама пряма вважається належною півплощині.

Кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, утворений його сторонами, що сходяться в цій вершині.

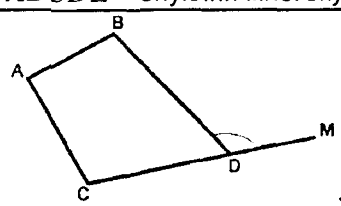


Неопуклий многокутник

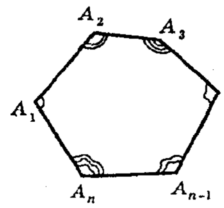
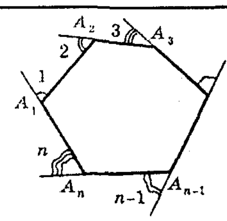
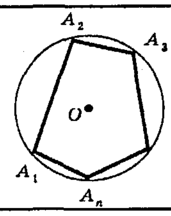
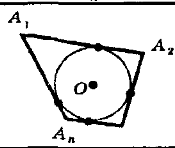
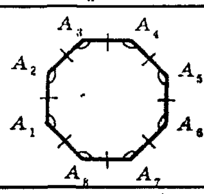
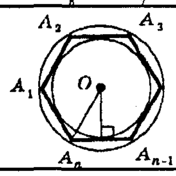
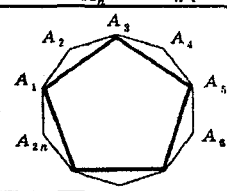
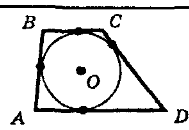
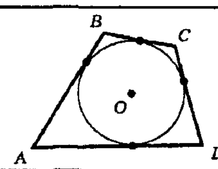
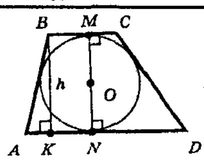


$\angle ABC$ – кут опуклого многокутника;
$ABCDE$ – опуклий многокутник.

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний внутрішньому куту многокутника, при цій вершині.



$\angle BDM$ – зовнішній кут

Сума кутів опуклого n - кутника	
Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$.	 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+...+\angle A_n=180°(n-2)$
Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.	 $\angle 1+\angle 2+...+\angle n=360°$
Многокутник називається вписаним у коло, якщо всі його вершини лежать на деякому колі, яке, в свою чергу, називається описаним навколо многокутника.	
Многокутник називається описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до деякого кола, яке, в свою чергу, називається вписаним у многокутник.	
Опуклий многокутник називається правильним, якщо в нього всі сторони і всі кути рівні.	
Правильний опуклий многокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола. Ці кола мають один і той самий центр, який називається центром многокутника.	
Вершини правильного $2n$-кутника, якщо їх брати через одну, є вершинами правильного n-кутника.	
У чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.	 $AB+DC=AD+BC$
Якщо в опуклому чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні між собою, то в нього можна вписати коло.	
Якщо трапеція або ромб описані навколо кола, то їх висоти дорівнюють діаметру кола.	 $MN=h$

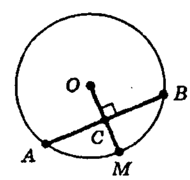
Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників

Радіус \ Кількість (n)	$n=3$	$n=4$	$n=6$
$R=\dfrac{a_n}{2\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$	$R=\dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R=\dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R=a_6$
$r=\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$	$r=\dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r=\dfrac{a_4}{2}$	$r=\dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$

Залежність сторони a_n правильного n-кутника від радіуса R описаного навколо нього кола і радіуса r вписаного в нього кола

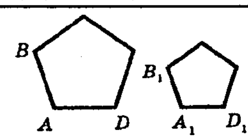
Кількість сторін	Залежність	
	a_n від R і n	a_n від r і n
n	$a_n=2R\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$	$a_n=2r\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$
3	$a_3=R\sqrt{3}$	$a_3=2r\sqrt{3}$
6	$a_4=R\sqrt{2}$	$a_4=2r$
4	$a_6=R$	$a_6=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$

Хорда, що перпендикулярна радіусу і проходить через його середину, дорівнює стороні правильного вписаного в коло трикутника.

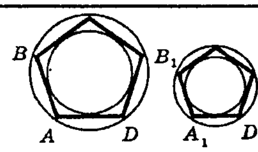


AB – сторона правильного трикутника, вписаного в коло.

Правильні опуклі n-кутники подібні. Зокрема, якщо в них сторони однакові, то вони рівні.



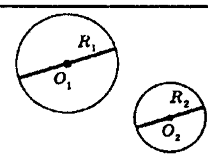
У правильних n-кутників відношення периметрів, радіусів вписаних і радіусів описаних кіл рівні.



$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

Довжина кола

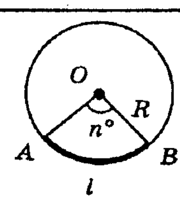
Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто є сталою величиною, яка позначається π ($\pi \approx 3,14$).



$$\frac{l_1}{2R_1}=\frac{l_2}{2R_2}$$

Довжина кола дорівнює: $l=2\pi R$ або $l=\pi D$, $D=2R$

Довжина дуги кола обчислюється за формулою: $l=\dfrac{R}{180^\circ}\cdot n$, де n – градусна міра кута, або $l=\alpha R$, де α – радіанна міра кута.



Радіанна міра кута

Радіанна міра кута отримується з градусної множенням на $\frac{\pi}{180°}$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot n$, де α – радіанна міра кута, а n – градусна міра кута.

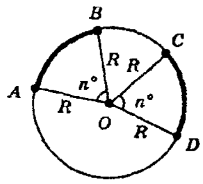
Одиницею радіанної міри кутів є радіан. Кут в один радіан – це центральний кут, у якого довжина дуги дорівнює радіусу. Градусна міра кута в один радіан дорівнює: $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Радіанна міра деяких кутів

0°	30°	45°	60°	90°	180°
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π

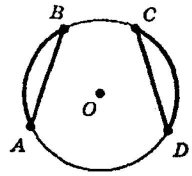
Хорди і дуги кіл

Якщо градусні міри двох дуг одного кола рівні, то дуги теж рівні. І навпаки: якщо дуги рівні, то і градусні міри їх рівні.



$\cup AB = \cup CD$

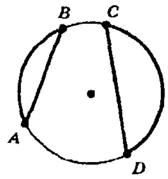
Рівні дуги стягуються рівними хордами, і навпаки: рівні хорди стягують рівні дуги.



$AB = CD$

$\cup AB = \cup CD$

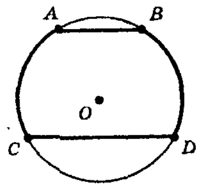
Більша дуга, яка не перевищує 180°, стягується більшою хордою, і навпаки: більша хорда стягує більшу дугу.



$CD > AB$,

$\cup CD > \cup AB$

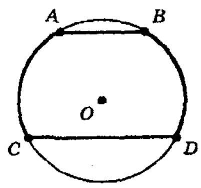
Дуги, розташовані між паралельними хордами, рівні між собою.



$AB \parallel CD$

$\cup AC = \cup BD$

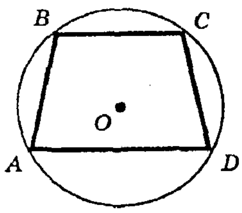
Якщо хорди, що не перетинаються, з'єднують кінці рівних дуг одного кола, то ці хорди паралельні.



$AB \parallel CD$

$\cup AC = \cup BD$

Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна.



$AB = CD$

1. Ланки ламаної $EFMO$ такі: $EF = 1\,см$; $FM = 4\,см$; $MO = 2\,см$. Чи може відрізок EO дорівнювати: а) $0{,}5\,см$; б) $8\,см$?

Розв'язання.

Використаємо теорему, виходячи з якої довжина ламаної $EFMO$ повинна бути не менше довжини відрізка EO, що з'єднує її кінці. Довжина ламаної $EFMO$ дорівнює $7\,см$, тобто, відрізок EO повинен бути не більше $7\,см$.

Відповідь: відрізок EO може дорівнювати $0{,}5\,см$ і не може дорівнювати $8\,см$.

2. Знайти кути опуклого п'ятикутника, якщо вони пропорційні числам $1, 3, 5, 7, 11$.

Розв'язання.

Сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $180°\cdot(5-2)=180°\cdot 3=540°$. Прийнявши за x менший з кутів, складемо рівняння: $x+3x+5x+7x+11x=540$, $27x=540$; $x=20°$

Відповідь: кути п'ятикутника дорівнюють $20°; 60°; 100°; 140°; 220°$.

3. Скільки сторін має опуклий n - кутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює $1260°$?

Розв'язання.

$180°(n-2)=1260°$, $180n-360=1260°$, $180n=1260+360$, $180°n=1620$, $n=1620°:180°$, $n=9$.

Відповідь: 9 сторін.

4. Визначити суму внутрішніх кутів опуклого n -кутника, якщо $n=7$.

Розв'язання.

$180°(7-2)=180°\cdot 5=900°$.

Відповідь: $900°$.

5. Сторона правильного вписаного в коло трикутника дорівнює a. Знайти сторону квадрата, вписаного в коло.

Розв'язання.

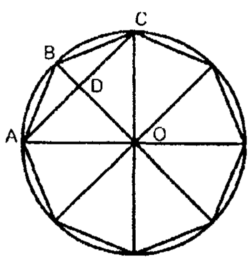
Зв'язок між сторонами правильного трикутника і правильного чотирикутника виражається формулами: $a_3 = R\sqrt{3}$, звідки $R=\dfrac{a_3}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$; $a_4 = R\sqrt{2}$. Підставивши значення R, отримаємо:

$$a_4=\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь: $a_4 = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

6. Довести, що сторона правильного 8 - кутника обчислюється за формулою: $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R – радіус описаного кола.

Доведення.



Нехай AB — сторона правильного 8 - кутника, $AO = BO = CO = R$ – описаного кола, тоді $AC=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$ (із ΔAOC). ΔAOD – прямокутний, $BO \perp AC$ і $\angle DOA = \angle OAD = 45°$, отже, і $DO = AD$, $AD=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ і $DO=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Знайдемо BD. $BD = R - DO$;

$$BD=R-\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{2R-R\sqrt{2}}{2}=\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}.$$

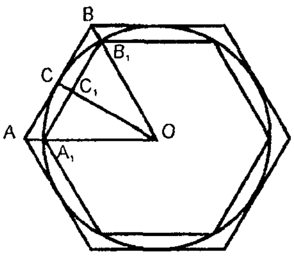
ΔABD – прямокутний за теоремою Піфагора: $AB^2 = BD^2 + AD^2$,

отримаємо: $AB=\sqrt{\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{R^2}{4}\cdot\left(2+4-4\sqrt{2}+2\right)}=\sqrt{\dfrac{R^2\cdot 4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

Відповідь $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

7. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює $3\,см$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього шестикутника.

Розв'язання.



1-й спосіб. Нехай AB – сторона правильного шестикутника, описаного навколо кола радіуса R, тобто $BO = R$, A_1B_1 – сторона правильного вписаного у коло шестикутника і $CO = r = 3\,см$, тоді $A_1B_1 = 3\,см$, $C_1B_1 = 1,5\,см$. Знайдемо C_1O з прямокутного трикутника C_1OB_1 за теоремою Піфагора:

$$B_1O^2 = C_1B_1^2 + C_1O^2;$$

звідки $C_1O = \sqrt{B_1O^2 - C_1B_1^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(см);$

$\Delta OBC \backsim \Delta OB_1C_1$ (за гострим кутом BOC), тоді $\dfrac{BO}{B_1O} = \dfrac{CO}{C_1O};$

$$BO = \frac{B_1O \cdot CO}{C_1O} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,(см).$$

2-й спосіб. Використовуючи зв'язок між стороною правильного шестикутника і радіусами описаного і вписаного кіл.

$$a_6 = R;\ a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}};\ R = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,(см).$$

Відповідь: $BO = 2\sqrt{3}\,см$.

8. Точки M і N поділяють коло на дві дуги, різниця градусних мір яких дорівнює $90°$. Чому дорівнюють градусні міри кожної із дуг?

Розв'язання.

Сума градусних мір дуг дорівнює $360°$, а різниця дорівнює $90°$. Позначимо градусні міри дуг x і y. Маємо:

$$\begin{cases} x + y = 360° \\ x - y = 90° \end{cases}$$

$2x = 450°$, $x = 225°$, то $y = 135°$.

Відповідь: $135°$, $225°$.

9. Знайти відношення периметра правильного вписаного 12-кутника до діаметра.

Розв'язання.

$$P_{12} = a \cdot n = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{12} = 24R\sin 15°.\ \frac{P_{12}}{2R} = \frac{24R \cdot \sin 15°}{2R} = 12\sin 15° \approx 12 \cdot 0,2588 \approx 3,12.$$

Відповідь: $3,12$.

10. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює $3\,см$. Обчислити довжину кола, описаного навколо нього.

Розв'язання.

Сторона рівностороннього трикутника знаходиться за формулою $a_3 = R\sqrt{3}$, звідки

$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}(см)$, тоді $l = 2\pi \cdot \dfrac{3}{\sqrt{3}}$; $l = 2\pi\sqrt{3}\,(см)$.

11. Обчислити радіус кола, довжина якого дорівнює $12,5\,дм$.

Розв'язання.

$$l = 2\pi R;\ R = \frac{l}{2\pi} = \frac{12,56}{6,28} = 2\,(дм).$$

Відповідь: $R = 2\,дм$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого n - кутника, узятих по одному при кожній вершині?
2. Кути опуклого чотирикутника відносяться як $1:2:3:4$. Знайти ці кути.
3. Чи може п'ятикутник мати сторони довжиною $3\,см$, $4\,см$, $6\,см$, $8\,см$ і $25\,см$?
4. Які з правильних n - кутників мають центр симетрії?
5. Знайти величини внутрішніх кутів опуклого n - кутника, якщо $n=8$; $n=10$.
6. Знайти величини зовнішніх кутів опуклого n - кутника, якщо $n=8$; $n=10$.
7. Два кути опуклого многокутника дорівнюють по $100°$, а решта по $130°$. Скільки вершин має цей многокутник?
8. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює сумі зовнішніх?
9. Скільки сторін має n - кутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює $1980°$?
10. Кожний із кутів опуклого шестикутника, починаючи з другого, більше попереднього на $20°$. Знайти кути опуклого шестикутника.
11. Центральний кут правильного многокутника дорівнює $72°$. Знайти кількість сторін многокутника.
12. Довести, що будь-який трикутник є опуклим многокутником.
13. У коло радіуса $R=2\,см$ вписати правильний n -кутник, якщо: $n=4$; $n=6$; $n=12$.
14. Навколо кола радіуса $2\,см$ описати правильний n - кутник, якщо $n=6$.
15. Накреслити трикутник, у якого центри вписаного і описаного кіл не співпадають.
16. Сторона правильного трикутника дорівнює $8\sqrt{3}\,см$. Обчислити радіуси вписаного і описаного кіл.
17. Дві точки поділяють коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як $4:5$. Знайти градусну міру кожної з дуг.
18. У квадрат зі стороною $8\,см$ вписане коло. Знайти довжину цього кола.
19. Знайти сторону правильного чотирикутника, якщо діагональ цього чотирикутника дорівнює $16\,см$.
20. У правильний трикутник, сторона якого дорівнює $8\sqrt{3}\,см$, вписане коло. Навколо нього описаний квадрат. Знайти сторону квадрата.
21. У правильний шестикутник, сторона якого дорівнює $8\sqrt{3}\,см$, вписане коло. Знайти довжину цього кола.
22. Знайти довжину дуги кола, відповідної центральному куту в $150°$. Радіус кола $6\,см$.
23. Правильний чотирикутник зі стороною $8\sqrt{3}\,см$ описаний навколо кола. Знайти сторону правильного трикутника, вписаного в це коло, і довжину кола.
24. Сторони прямокутника $8\,см$ і $6\,см$. Знайти довжину кола, описаного навколо цього прямокутника.
25. Навколо квадрата зі стороною $4\,см$ описане коло. Знайти сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.
26. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти довжину цього кола, якщо основи дорівнюють $12\,см$ і $18\,см$.
27. У правильний десятикутник зі стороною $16\,см$ вписане коло. Знайти довжину дуги, розміщеної між двома точками дотику сторін десятикутника і кола.
28. Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник зі стороною $7\,см$. Знайти сторони трикутника.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-3-1

<table>
<tr><th>В – І</th><th>7 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Чи можуть ланки замкнутої ламаної дорівнювати: 5 см, 8 см, 22 см і 7 см?</td><td>1. Чи можуть ланки замкнутої ламаної дорівнювати: 15 см, 7 см, 1 см і 3 см?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Ламана складається з чотирьох ланок, довжини яких відносяться як $2:3:4:8$. Визначити довжину кожної ланки ламаної, якщо довжина ламаної 85 см.</td><td>2. Ламана складається з чотирьох ланок, довжини яких відносяться як $2:5:4:8$. Довжина ламаної 152 см. Визначити довжину кожної ланки.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Визначити довжину найбільшої діагоналі правильного шестикутника, якщо сторона цього шестикутника дорівнює 4 см.</td><td>3. Скільки сторін має правильний многокутник, у якого кожний внутрішній кут 144°?</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th>9 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Знайти величини внутрішніх і зовнішніх кутів опуклого восьмикутника.</td><td>1. Знайти величини внутрішніх і зовнішніх кутів опуклого десятикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Два кути опуклого многокутника дорівнюють по 70°, а решта - по 160°. Скільки сторін має цей многокутник?</td><td>2. Три кути опуклого многокутника дорівнюють по 70°, а решта – по 150°. Скільки сторін має цей многокутник?</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Сторона правильного шестикутника дорівнює 8 см. Знайти найменшу діагональ шестикутника.</td><td>3. Сторона правильного восьмикутника дорівнює 2 см. Знайти найменшу діагональ восьмикутника.</td></tr>
<tr><th>В – V</th><th>12 балів</th><th>В – VI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Три кути чотирикутника відносяться як $2:3:5$, а четвертий більше, ніж третій на 45°. Знайти кути чотирикутника.</td><td>1. Два кути п'ятикутника дорівнюють 85° і 65°, а інші відносяться як $6:5:2$. Знайти невідомі кути п'ятикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Знайти кількість сторін правильного многокутника, у якого внутрішній кут у 4 рази більше центрального.</td><td>2. Знайти кількість сторін правильного многокутника, у якого центральній кут у 3 рази менше внутрішнього.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Довести, що зовнішній кут будь-якого правильного многокутника дорівнює його центральному куту.</td><td>3. Довести, що у чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.</td></tr>
</table>

САМОСТІЙНА РОБОТА С-3-2

<table>
<tr><th>В – І</th><th>7 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Визначити градусну міру центрального кута, відповідного дузі довжиною l в колі радіуса R, якщо $l = 5$ см, $R = 15$ см.</td><td>1. Визначити градусну міру центрального кута, відповідного дузі довжиною l в колі радіуса R, якщо $l = \pi$ см, $R = 20$ см.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Знайти градусну міру кута, якщо його радіанна міра дорівнює: а) 1; б) $\frac{\pi}{4}$.</td><td>2. Знайти градусну міру кута, якщо радіанна міра дорівнює: а) 3; б) $\frac{\pi}{10}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Знайти радіус кола, вписаного в правильний трикутник і описаного навколо нього, якщо сторона трикутника дорівнює 4 см.</td><td>3. Знайти радіус кола, вписаного в правильний шестикутник і описаного навколо нього, якщо сторона шестикутника дорівнює 6 см.</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th>9 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Радіус кола дорівнює 6 см. Чому дорівнює довжина дуги цього кола, відповідної центральному куту у 40°?</td><td>1. Дуга кола, відповідна центральному куту у 240°, дорівнює 4 м. Чому дорівнює радіус цього кола?</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Сторона правильного шестикутника дорівнює 15 см. Знайти радіус вписаного і описаного кіл.</td><td>2. Радіус кола, вписаного у правильний шестикутник, дорівнює 7 см. Обчислити довжину сторони правильного шестикутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. У коло вписаний правильний трикутник, в нього вписане коло, а в це коло вписаний квадрат. Знайти сторону квадрата, якщо сторона трикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см.</td><td>3. Правильний чотирикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см описаний навколо кола. Знайти сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.</td></tr>
</table>

12 балів

В – V	В – VI
1. У коло з радіусом 6 *см* вписаний правильний трикутник і навколо нього описаний правильний чотирикутник. Знайти сторону трикутника і квадрата.	1. Правильний трикутник описаний навколо кола, а правильний шестикутник вписаний у коло. Знайти сторону правильного трикутника, якщо сторона шестикутника дорівнює 3 *см*.
2. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 18 *см* і 32 *см*. Знайти довжину кола, вписаного в цю трапецію.	2. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 100 *см*, а різниця основ – 14 *см*. Знайти довжину кола, вписаного в рівнобічну трапецію.
3. Довжина кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12π *м*. Знайти кількість сторін многокутника, якщо довжина його сторони $6\sqrt{3}$ *см*.	3. У правильний многокутник зі стороною $2\sqrt{3}$ *см* вписане коло, довжина якого дорівнює 6π *см*. Знайти кількість сторін многокутника.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К – 4

7 балів

В – I	В – II
1. Сторона квадрата дорівнює 16 *см*. Знайти радіуси вписаного і описаного кіл.	1. Обчислити сторону правильного трикутника, описаного навколо кола з радіусом 3 *см*.
2. Довжина хорди дорівнює $4\sqrt{3}$ *см*. Знайти довжину дуги цієї хорди, якщо градусна міра дуги дорівнює $120°$.	2. Довжина дуги 2π *см*. Знайти довжину хорди, що стягує цю дугу, якщо градусна міра дуги дорівнює $60°$.
3. Сторона правильного трикутника, вписаного у коло, дорівнює 15 *см*. Знайти сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.	3. Сторона правильного шестикутника, вписаного у коло, дорівнює 6 *см*. Знайти сторону квадрата, описаного навколо даного кола.

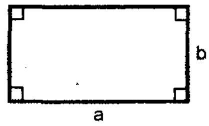
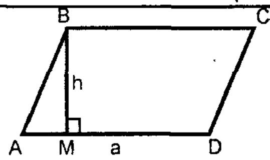
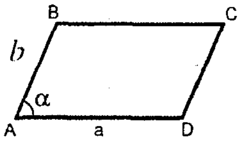
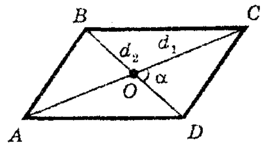
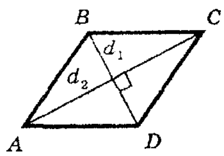
9 балів

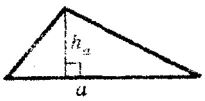
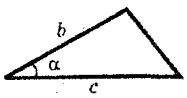
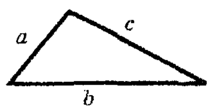
В – III	В – IV
1. Знайти радіус кола, вписаного в правильний многокутник зі стороною 30 *см*, якщо радіус кола, описаного навколо цього многокутника, дорівнює $10\sqrt{3}$ *см*.	1. Знайти радіус кола, описаного навколо правильного многокутника зі стороною 24 *см*, якщо радіус кола, вписаного в цей многокутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ *см*.
2. Довжина дуги $\frac{3}{4}\pi$ *см*. Знайти довжину хорди, якщо градусна міра дуги дорівнює $120°$.	2. Довжина хорди $5\sqrt{3}$ *см*. Знайти довжину дуги цієї хорди, якщо градусна міра дуги дорівнює $120°$.
3. Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 30π *см*. Знайти периметр трикутника, якщо його основа 24 *см*.	3. Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 50π *см*, а висота, проведена до основи, дорівнює 32 *см*. Знайти периметр трикутника.
4. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 18 *см* і 32 *см*. Знайти радіус кола, вписаного у трапецію.	4. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 100 *см*, а різниця основ – 14 *см*. Знайти радіус кола, вписаного у трапецію.

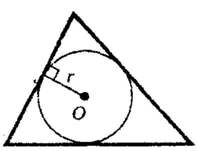
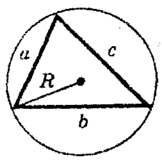
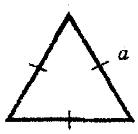
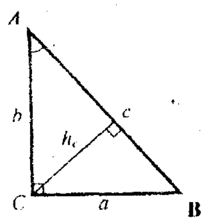
12 балів

В – V	В – VI
1. Правильний трикутник зі стороною $a = \sqrt{6}$ *см* вписаний у коло. Знайти сторону квадрата, вписаного в це коло.	1. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $5\sqrt{2}$ *см*. Знайти радіус кола, вписаного в даний квадрат.
2. Знайти кількість сторін правильного многокутника, якщо сума двох його кутів на $240°$ менше суми інших кутів.	2. Знайти кількість сторін правильного многокутника, якщо сума трьох його кутів на $108°$ більше суми інших кутів.
3. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 21 *см* і 28 *см*. Знайти довжину кола, вписаного в трапецію.	3. Довжина кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 24π *см*, а більша бічна сторона дорівнює 25 *см*. Знайти основи трапеції.
4. У колі радіусом 25 *см* з однієї сторони від центра кола проведені дві паралельні хорди довжиною 48 *см* і 30 *см*. Знайти відстань між хордами.	4. В колі по різні сторони від центра проведені дві паралельні хорди, довжини яких 48 *см* і 30 *см*, а відстань між ними дорівнює 27 *см*. Знайти радіус кола.

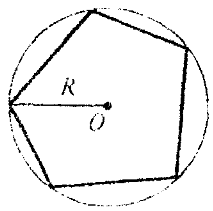
§4. ПЛОЩІ ФІГУР

Обчислення площ фігур	
Площа прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.	 $S = a \cdot b$
Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.	 $S = a \cdot h$ чи $S = AD \cdot BM$.
Площа паралелограма дорівнює добутку його сторін на синус кута між ними.	 $S = ab\sin\alpha$.
Площа паралелограма дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними.	 $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$
Площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей.	 $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

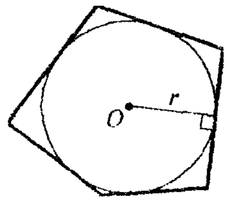
Формули для обчислення площі трикутника		
 $S = \frac{1}{2}ah_a$	 $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$	Формула Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр

			Прямокутний трикутник
 $S = pr$ p – півпериметр	 $S = \frac{abc}{4R}$	 $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	 $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$; $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Вписаний та описаний многокутники (вписане і описане кола)



Вписаний – усі вершини лежать на колі.



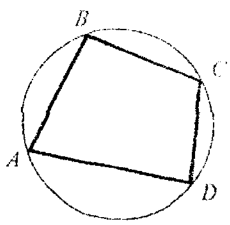
Описаний – усі сторони є дотичними до кола. $S_{опис.} = \frac{P \cdot r}{2}$, де P – периметр, r – радіус вписаного кола.

Вписаний і описаний чотирикутники

$\angle A + \angle C = 180°$,

$\angle B + \angle D = 180°$

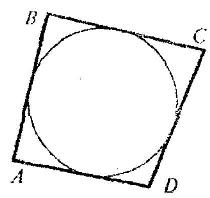
І навпаки: якщо у чотирикутника сума протилежних кутів дорівнює $180°$, то навколо нього можна описати коло.



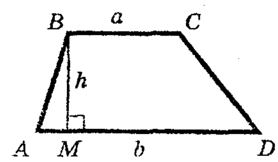
$AB + CD = BC + AD$

(суми довжин протилежних сторін рівні)

І навпаки: якщо у опуклого чотирикутника суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

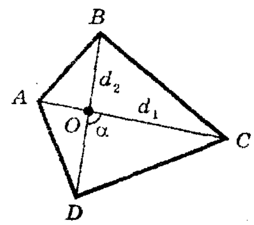


Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту: $S = \frac{a+b}{2}h.$



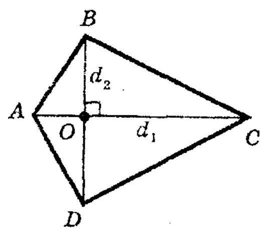
Площа опуклого чотирикутника

Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються, то площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$

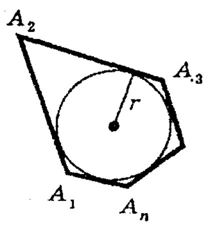
Якщо в опуклому чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то його площа дорівнює половині добутку діагоналей.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

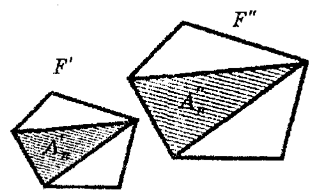
Площа описаного многокутника

Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює половині добутку периметра многокутника на радіус кола.

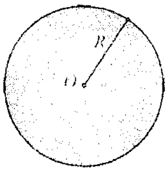


$S = p \cdot r$, де p – півпериметр

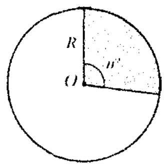
Площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.



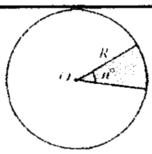
Площа круга і його частин



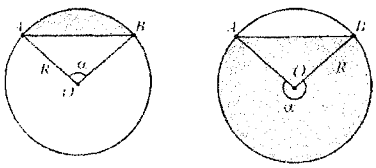
$S = \pi R^2$ – площа круга.



$S = \dfrac{\pi R^2}{360} \cdot n$ – площа кругового сектора, що відповідає центральному куту в n градусів.



$S = \dfrac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \dfrac{R^2 \alpha}{2}$ – площа кругового сектора, що відповідає центральному куту в α радіан.



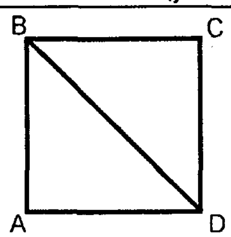
круговий сегмент $S_{круг.сегм.} = \dfrac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_\Delta$

$S_{круг.сегм.} = S_{круг.сект.} \pm S_\Delta AOB$

(при $\alpha < 180°$ знак «–»,при $\alpha > 180°$ знак «+»)

УЧНІВСЬКА СТОРІНКА

1. Знайти площу квадрата S за його діагоналлю a.



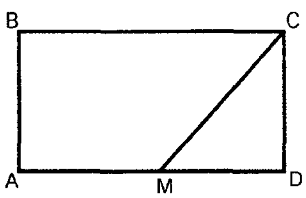
Розв'язання.

Нехай $ABCD$ – квадрат і $AB = BC = CD = DA = x$.

ΔABD – прямокутний і за теоремою Піфагора $BD^2 = AB^2 + AD^2$ отримаємо $a^2 = 2x^2$; $x = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $S = x^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Відповідь: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}a^2$.

2. Бісектриса кута прямокутника поділяє сторону на відрізки $12\,см$ і $8\,см$, починаючи з вершини протилежного кута. Обчислити площу прямокутника.



Розв'язання.

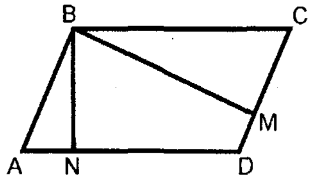
Нехай CM – бісектриса $\angle C$ прямокутника $ABCD$. $AM = 12\,см$, $MD = 8\,см$, якщо CM – бісектриса $\angle C$, то $\angle MCD = 45°$, тоді і $\angle CMD = 45°$, отже, ΔMCD – прямокутний і рівнобедрений, $MD = DC = 8\,см$, тоді

$AM + MD = AD = 20\,см$, $AB = CD = 8\,см$ (як протилежні сторони).

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8 \cdot 20 = 160\left(см^2\right)$.

Відповідь: $S_{ABCD} = 160\,см^2$.

3. Висоти паралелограма дорівнюють $18\,см$ і $24\,см$, а кут між ними – $60°$. Знайти площу паралелограма.



Розв'язання.

$BN = 18\,см$, $BM = 24\,см$. Нехай $ABCD$ — паралелограм, де $BM \perp CD$, $BN \perp AD$. $ABCD$ — чотирикутник, в якому $\angle BMD + \angle BND = 180°$, тоді $\angle NBM + \angle MDN = 180°$, $\angle NBM = 60°$ — за умовою, отже, $\angle NDM = 120°$. Знайдемо величину $\angle C$. $\angle C = 180° - \angle NDM = 60°$. Із ΔBMC:

$BC = \dfrac{MB}{\sin 60°} = \dfrac{24 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{24 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}\,(см)$; $BC = AD$; $S = AD \cdot BN$;

$S = 16\sqrt{3} \cdot 18 = 288\sqrt{3}\,(см^2)$.

Відповідь: $S_{ABCD} = 288\sqrt{3}\,см^2$.

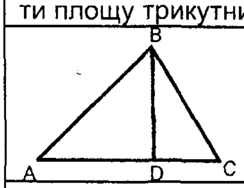
4. Кути ромба відносяться як $1:5$, а його сторона дорівнює $10\,см$. Знайти площу ромба.

Розв'язання.

Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді один кут містить x градусів, другий — $5x$ градусів, а їх сума дорівнює $180°$. Отримаємо: $x + 5x = 180$; $6x = 180$; $x = 30°$, тоді площа ромба дорівнює: $10 \cdot 10 \cdot \sin 30° = 50\,(см^2)$.

Відповідь: $50\,см^2$.

5. Сторона трикутника дорівнює $12\,см$, а висота, проведена до неї, дорівнює $2{,}5\,см$. Знайти площу трикутника.

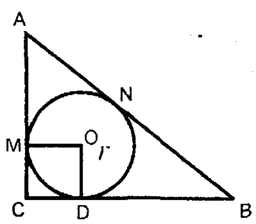


Розв'язання.

Нехай у ΔABC $AC = 12\,см$, $BD = 2{,}5\,см$, тоді $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} 12 \cdot 2{,}5 = 15\,(см^2)$.

Відповідь: $S_\Delta = 15\,см^2$.

6. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола і гіпотенузи поділяє гіпотенузу на відрізки довжиною $5\,см$ і $12\,см$. Знайти радіус вписаного кола.



Розв'язання.

Нехай у ΔABC $AM = AN = 5\,см$, $BN = BD = 12\,см$.

$MO = OD = CD = MC = r = x$. За теоремою Піфагора:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$. $AB = 5 + 12 = 17\,(см)$, $AC = (5 + x)\,см$,

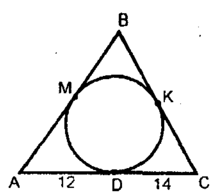
$CB = (x + 12)\,см$. Отримаємо: $(5 + x)^2 + (x + 12)^2 = 17^2$;

$2x^2 + 34x - 120 = 0$;

$x^2 - 17x - 60 = 0$; $x = \dfrac{-17 \pm 33}{2}$; $x > 0$; $x = 3$; $r = 3\,см$.

Відповідь: $R = 3\,см$.

7. Дано: $P = 84$. Знайти: $S_{\Delta ABC}$.



Розв'язання.

$AM = AD$; $DC = KC$; $BM = BK$ – властивість дотичних до кола.

Тоді $P = 2AD + 2DC + 2BK$; $AD + DC + BK = \dfrac{1}{2}P = 42$.

$BK = 42 - AD - DC$; $BK = 16$. $AB = 12 + 16 = 28$; $BC = 16 + 14 = 30$;

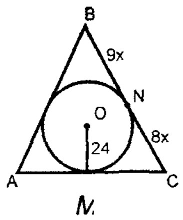
$AC = 26$. За формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$S = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14 = 336\,(од^2.)$.

Відповідь: $336\,од^2$.

8. Дано: $\angle A = \angle C$. Знайти: $S_{\Delta ABC}$.

Розв'язання.



ΔABC – рівнобедрений, тому що $\angle A = \angle C$, тоді $AB = BC = 17x$.;

$NC = MC = 8x$ (властивість дотичних);

$AM = MC$, тому що M – середина основи ΔABC;

$AC = 2MC = 16x$.; $\quad P_{ABC} = 2 \cdot 17x + 16 = 50x$;; $\quad p = \frac{1}{2} \cdot 50x = 25x$.;

$S = p \cdot r$; $S = p \cdot OM = 25x \cdot 24$.

За формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$S = \sqrt{25x \cdot 8x \cdot 8x \cdot 9x} = 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot x^2 = 5 \cdot 24x^2$.

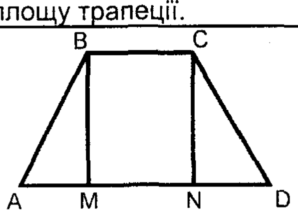
Складемо рівняння.

$25x \cdot 24 = 5 \cdot 24x^2$; $x = 5$. $S = p \cdot r = 25 \cdot 5 \cdot 24 = 3000\,(од^2.)$.

Відповідь: $3000\ од^2$.

9. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $12\,см$ і $28\,см$, а бічна сторона – $17\,см$. Знайти площу трапеції.

Розв'язання.



Нехай $ABCD$ – рівнобічна трапеція, де $BC = 12\,см$ і $AD = 28\,см$, тоді $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} BM$.

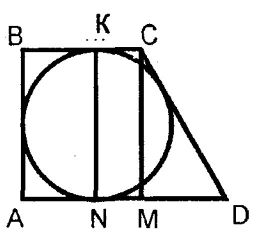
Знайдемо BM. $BM = CN$, $\Delta ABM = \Delta DCN$ (оскільки $\angle A = \angle D$), тоді $AM = ND = (28 - 12) : 2 = 8\,(см)$; із ΔABM :

$BM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15\,(см)$; $S = \frac{12 + 28}{2} \cdot 15 = 20 \cdot 15 = 300\,(см^2)$.

Відповідь: $S_{ABCD} = 300\,см^2$.

10. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює $10\,см$. Обчислити площу трапеції, якщо довжина кола, вписаного в трапецію, дорівнює $12\pi\,см$.

Розв'язання.



Нехай $BC = 10\,см$. $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB$, $AB = MN$, $KN = 2r$;

$l = 2\pi r$; $\quad r = \frac{12\pi}{2\pi} = 6\,(см)$, $\quad CM \parallel KN$, $\quad CM = KN = 12\,см$.

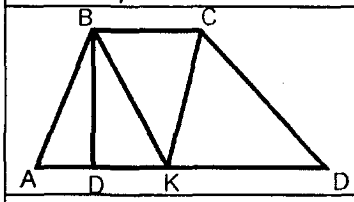
$AM = BC = 10\,см$, $BC + AD = AB + CD$, $10 + AD = 12 + CD$,

тоді нехай $CD = x\,см$, то $AD = (x + 2)\,см$;

$AD = AM + MD$; $x + 2 = 10 + MD$; $MD = (x - 8)\,см$. Із ΔCMD: $CD^2 = MD^2 + CM^2$ – за теоремою Піфагора. $x^2 = (x-8)^2 + 12^2$; $x^2 = x^2 - 16x + 64 + 144$; $16x = 208$; $x = 13$, тоді $MD = 13 - 8 = 5\ см$, одержимо $AD = 10 + 5 = 15\ (см)$; $S = \frac{10 + 15}{2} \cdot 12 = 25 \cdot 6 = 150\,(см^2)$.

Відповідь: $S_{тр.} = 150\,см^2$.

11. Дано: трапеція $ABCD$, точка K – середина AD. Довести, що площі трикутників ABK і KCD рівні.



Розв'язання.

Нехай $BD \perp AD$, тоді $S_{\Delta ABK} = \dfrac{AK \cdot BD}{2}$; $S_{\Delta KCD} = \dfrac{KD \cdot BD}{2}$;

$AK = KD$ (за умовою), то $S_{\Delta ABK} = S_{\Delta KCD}$.

12. Площі подібних трикутників відносяться як $1:4$. Сторона першого трикутника $6\,см$. Знайти відповідну сторону другого трикутника.

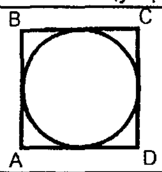
Розв'язання.

Нехай AB і A_1B_1 – відповідні сторони двох подібних трикутників. Площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів. Отримаємо $\dfrac{1}{4} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}}$; $\dfrac{1}{4} = \dfrac{36}{(A_1B_1)^2}$;

$(A_1B_1)^2 = 4 \cdot 36$; $A_1B_1 = \sqrt{4 \cdot 36} = 12\,(см)$.

Відповідь: $A_1B_1 = 12\,см$.

13. Знайти площу круга, вписаного в квадрат зі стороною $6\,см$.



Розв'язання.

Нехай $ABCD$ – квадрат, де $AB = 6\,см$, тоді $r = 3\,см$, де r – радіус вписаного кола.

$S = \pi r^2 = \pi \cdot 36 = 36\pi\,(см^2)$.

Відповідь: $S = 36\pi\ см^2$.

14. Знайти площу круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $a = 4\sqrt{3}\,см$.

Розв'язання.

$S = \pi R^2$; $R = \dfrac{abc}{4S_\Delta}$; $S_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; $S_\Delta = 12\sqrt{3}\,см^2$, $R = \dfrac{4\sqrt{\cancel{3}} \cdot \cancel{4}\sqrt{\cancel{3}} \cdot \cancel{4}\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{4} \cdot \cancel{12}\sqrt{\cancel{3}}} = 4\,(см)$.

$S = 16\pi\ см^2$.

Відповідь: $S = 16\pi\ см^2$.

15. Знайти площу сектора радіуса R, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює $150°$.

Розв'язання.

$$S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi R^2 \cdot 150°}{360°} = \frac{\pi R^2 \cdot 5}{12} = \frac{5}{12}\pi R^2.$$

Відповідь: $S = \dfrac{5}{12}\pi R^2$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти площу прямокутника, якщо його сторони дорівнюють $8\,см$ і $5\,см$.
2. Площа квадрата дорівнює $12\,см^2$. Чому дорівнює його сторона?
3. Одна зі сторін прямокутника на $3\,см$ більше, ніж інша, а його площа дорівнює $154\,см^2$. Знайти сторони прямокутника.
4. Сторона прямокутника дорівнює $16\,см$, а висота, проведена до неї, дорівнює $5\,см$. Знайти, площу прямокутника.
5. Обчислити периметр ромба, якщо його висота дорівнює $4\,дм$, а площа – $36\,дм^2$.
6. Сторони паралелограма дорівнюють $10\,см$ і $4\sqrt{2}\,см$, а кут між ними $45°$. Обчислити площу паралелограма.
7. Знайти площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють $12\,см$ і $10\,см$.

8. Периметр прямокутника дорівнює $18\,см$, а його площа дорівнює $20\,см^2$. Знайти сторони прямокутника.

9. Висоти паралелограма дорівнюють $3\,см$ і $5\,см$, а більша сторона $10\,см$. Знайти меншу сторону паралелограма.

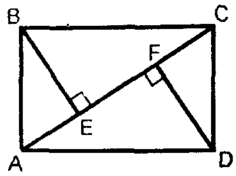
10. Діагоналі ромба дорівнюють $16\,см$ і $30\,см$. Обчислити висоту ромба.

11. Більша діагональ ромба дорівнює $8\sqrt{3}\,см$, а гострий кут $60°$. Знайти площу ромба.

12. Із вершин кута прямокутника до діагоналі проведений перпендикуляр, який поділяє її на відрізки, різниця між якими дорівнює $6\,см$. Знайти площу прямокутника, якщо довжина перпендикуляра $4\,см$.

13. Точка дотику кола, вписаного в ромб, поділяє його сторону на відрізки, відношення довжин яких дорівнює 9. Знайти площу ромба, якщо довжина кола дорівнює $24\pi\,см$.

14. Знайти площу прямокутника, якщо $EF = 16\,см$, $BE = 6\,см$.



15. Визначити сторону паралелограма, якщо одна із його сторін $5\,см$, площа $10\,см^2$ і один із кутів $30°$.

16. Прямокутник і паралелограм мають відповідно рівні сторони, а площі їх відносяться як $2:\sqrt{2}$. Знайти кути паралелограма.

17. Висоти паралелограма $14\,см$ і $16\,см$, а кут між сторонами $30°$. Знайти площу паралелограма.

18. Обчислити площу трикутника, якщо відомі сторона, що дорівнює $17\,см$, і висота, проведена до неї.

19. Дві сторони трикутника дорівнюють $12\,см$ і $4\sqrt{2}\,см$, а кут між ними $45°$. Знайти площу трикутника.

20. Обчислити площу трикутника зі сторонами $13\,см$, $20\,см$, $21\,см$.

21. Одна із сторін трикутника дорівнює $10\,см$. Знайти висоту трикутника, проведену до цієї сторони, якщо його площа дорівнює $35\,см^2$.

22. Обчислити площу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона дорівнює $5\,см$, а основа $6\,см$.

23. Обчислити площу прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза і катет відповідно дорівнюють $13\,см$ і $12\,см$.

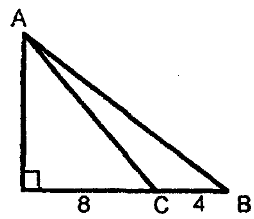
24. У трикутнику зі сторонами $16\,см$ і $8\,см$ проведені висоти до цих сторін. Висота, проведена до сторони $16\,см$, дорівнює $6\,см$. Чому дорівнює висота, проведена до сторони $8\,см$?

25. Дві сторони трикутника дорівнюють $10\,см$ і $8\,см$, а його площа $20\,см^2$. Обчислити кут між цими сторонами, якщо відомо, що він тупий.

26. Гіпотенуза прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}\,см$. Знайти площу трикутника.

27. Сторони трикутника дорівнюють $4\,м$, $13\,м$, $15\,м$. Знайти висоту, проведену до сторони $13\,м$.

28. $\angle ACB = 135°$. Знайти: площу ΔABC.



29. Знайти радіуси описаного і вписаного кіл для трикутника зі сторонами $17\,см$, $65\,см$, $80\,см$.

30. Рівнобедрений трикутник вписаний в коло, радіус якого $5\,см$. Основа трикутника дорівнює $6\,см$. Знайти площу трикутника.

31. Коло вписане в прямокутний трикутник з гіпотенузою $13\,см$, радіус вписаного кола $2\,см$. Знайти площу трикутника.

32. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки $20\,см$ і $16\,см$. Обчислити площу трикутника.

33. Знайти площу трапеції з основами $19\,см$ і $21\,см$ і висотою $14\,см$.

34. Знайти площу трапеції з основами $4\,см$ і $32\,см$, якщо бічна сторона, що дорівнює $16\,см$, утворює з більшою основою кут у $30°$.

35. Середня лінія трапеції дорівнює $23\,см$, висота – $10\,см$. Знайти площу трапеції.

36. Знайти площу круга, якщо довжина кола дорівнює $24\pi\,см$.

37. Обчислити площу сектора круга з радіусом $8\,см$, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює $45°$.

38. В рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює $13\,см$, а основи відповідно дорівнюють $7\,см$ і $17\,см$. Знайти площу трапеції.

39. У прямокутній трапеції $ABCD$ BD – бісектриса кута D, більша основа дорівнює $48\,см$ і більша бічна сторона дорівнює $30\,см$. Знайти площу трапеції.

40. Площа ΔABC дорівнює $48\,см^2$. Через середину висоти BD трикутника проведена пряма MN $(M \in AB, N \in BC)$, паралельна AC. Чому дорівнює площа ΔMBN?

41. Радіус кола $1\,см$, а площа кругового сектора дорівнює $\frac{\pi}{8}\,см^2$. Чому дорівнює центральний кут кругового сектора?

42. У круг вписаний квадрат, сторона якого $4\,см$. Знайти площу сегмента, що відсікає від круга сторона квадрата.

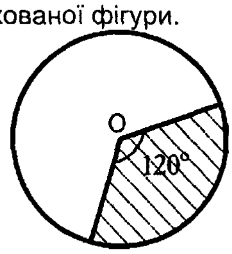
43. У трапеції основи дорівнюють $11\,см$ і $28\,см$, а бічні сторони $25\,см$ і $26\,см$. Знайти площу трапеції.

44. Периметр прямокутника $74\,см$, а площа – $300\,см^2$. Обчислити сторони прямокутника.

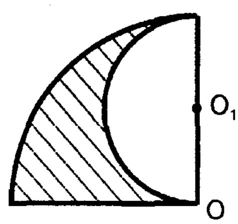
45. В прямокутній трапеції точка дотику вписаного кола поділяє більшу бічну сторону на відрізки $9\,см$ і $16\,см$. Обчислити площу трапеції.

46. Знайти площу заштрихованої фігури.

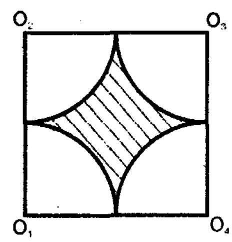
$R = 6\,см$



$R = 3\,см$



$R = 10\,см$



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4\,см$

R – радіус кола, O – центр кола.

47. В паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює $150°$, поділяє його сторону на відрізки $5\,см$ і $3\,см$, починаючи з вершини гострого кута. Обчислити площу паралелограма.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-1

В – І	7 балів	В – ІІ
1. Діагональ прямокутника дорівнює 8 см і утворює з більшою стороною кут 30°. Знайти площу прямокутника.		1. Діагональ прямокутника 30 см, а ширина 18 см. Знайти площу прямокутника.
2. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 20 см. Більша висота дорівнює 6 см. Знайти площу паралелограма.		2. Знайти площу ромба зі стороною 12 см і гострим кутом у 45°.
3. Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа $18\ см^2$. Знайти кути ромба.		3. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і $2\sqrt{3}$ см, а його площа дорівнює $18\ см^2$. Знайти кути паралелограма.
В – ІІІ	**9 балів**	**В – IV**
1. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 15 см. Висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 8 см. Знайти другу висоту цього паралелограма		1. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 15 см. Висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 10 см. Знайти другу висоту цього паралелограма.
2. Одна зі сторін прямокутника на 3 см більше другої, а його площа дорівнює $154\ см^2$. Знайти сторони прямокутника.		2. Діагональ прямокутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см і утворює з однією із сторін кут 60°. Знайти площу прямокутника.
3. Периметр ромба 16 см, а його площа $8\sqrt{2}\ см^2$. Знайти кути ромба.		3. У ромбі з площею $18\ см^2$ один з кутів дорівнює 150°. Знайти периметр ромба.
В – V	**12 балів**	**В – VI**
1. Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см, а його площа дорівнює $600\ см^2$. Знайти висоту ромба.		1. Площа ромба $240\ см^2$, а різниця діагоналей – 14 см. Знайти периметр ромба.
2. Із вершин протилежних кутів прямокутника проведені висоти на діагональ прямокутника. Відстань між основами перпендикулярів дорівнює 32 см. Обчислити площу прямокутника, якщо довжини цих перпендикулярів 12 см.		2. Дві сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 18 см, а різниця двох висот – 2 см. Знайти площу паралелограма.
3. Довжина кола, вписаного в ромб, дорівнює 72π см. Обчислити площу ромба, якщо його сторона точкою дотику поділяється у відношенні $4:9$.		3. Бісектриса кута прямокутника поділяє сторону на відрізки у відношенні $1:3$, починаючи від вершини протилежного кута. Обчислити площу прямокутника, якщо ця сторона 12 см.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-2

В – І	7 балів	В – ІІ
1. Сторона трикутника 18 см, а висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 20 см. Знайти площа трикутника.		1. Сторона трикутника 2,5 см, а висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 4 см. Знайти площу трикутника.
2. Дві сторони трикутника 7 см і 8 см, а кут між ними 30°. Знайти площу трикутника.		2. Дві сторони трикутника $10\sqrt{3}$ см і 8 см, а кут між ними 60°. Знайти площу трикутника.
3. Обчислити площу трикутника зі сторонами 4 см, 5 см, 7 см.		3. Обчислити площу трикутника зі сторонами 15 см, 26 см, 37 см.
В – ІІІ	**9 балів**	**В – IV**
1. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 50 см і 58 см. Знайти найбільшу висоту трикутника.		1. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 13 см і 20 см. Знайти найменшу висоту трикутника.
2. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 14 см, 15 см.		2. Обчислити радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 6 см, 25 см, 29 см.
3. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу, поділяє гіпотенузу на відрізки 16 см і 9 см. Обчислити площу трикутника.		3. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута на гіпотенузу, поділяє гіпотенузу на відрізки, різниця між якими 7 см. Ця висота дорівнює 12 см. Знайти площу трикутника.

12 балів

В – V	В – VI
1. Бісектриса прямого кута трикутника поділяє його гіпотенузу на відрізки $15\,см$ і $20\,см$. Знайти площу трикутника.	1. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника поділяє катет на відрізки $10\,см$ і $6\,см$. Знайти площу цього трикутника.
2. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона точкою дотику вписаного кола поділяється на відрізки $4\,см$ і $6\,см$, починаючи з вершини основи. Довжина кола $6\pi\,см$. Обчислити площу трикутника.	2. У рівнобедреному трикутнику довжина вписаного кола дорівнює $24\pi\,см$, а його центр віддалений від вершини трикутника на $20\,см$. Обчислити периметр трикутника.
3. Радіус описаного навколо прямокутного трикутника кола дорівнює $10\,см$, а катет – $16\,см$. Обчислити радіус вписаного кола.	3. Точка дотику вписаного у прямокутний трикутник кола поділяє гіпотенузу на відрізки $8\,см$ і $12\,см$. Обчислити радіус вписаного кола.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-4-3

7 балів

В – I	В – II
1. Основи трапеції $6{,}7\,см$ і $4{,}3\,см$, а висота $0{,}5\,см$. Знайти площу трапеції.	1. Середня лінія трапеції – $7\,см$, а висота – $11\,см$. Знайти площу трапеції.
2. Чому дорівнює площа кругового сектора, якщо його радіус $8\,см$, а центральний кут $120°$?	2. Чому дорівнює площа кругового сектора, якщо його центральний кут дорівнює $36°$, а діаметр кола $10\,м$?
3. Відповідні сторони двох подібних многокутників $3\,см$ і $2\,см$. Площа меншого з цих многокутників дорівнює $50\,см^2$. Обчислити площу більшого многокутника.	3. Відповідні сторони двох подібних трикутників $10\,см$ і $12\,см$. Площа першого $30\,см^2$. Знайти площа другого трикутника.

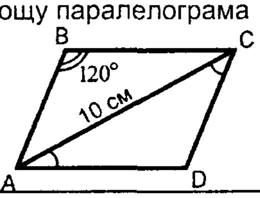
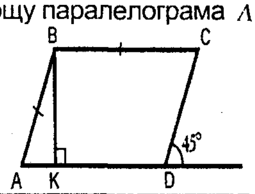
9 балів

В – III	В – IV
1. В прямокутній трапеції менша бічна сторона $24\,см$, більша діагональ є бісектрисою гострого кута в $60°$. Обчислити площу трапеції.	1. Площа трапеції $192\,см^2$, а висота – $16\,см$. Знайти основи трапеції, якщо одна з них у 3 рази більше другої.
2. Площа кругового сектора дорівнює $5\pi\,см^2$. Знайти центральний кут, відповідний сектору, якщо радіус кола $10\,см$.	2. Сектор кола має площу $4\,см^2$, а відповідний сектору центральний кут дорівнює $45°$. Обчислити діаметр кола.
3. Точка дотику вписаного в трапецію кола поділяє бічну сторону на відрізки, різниця яких дорівнює $10\,см$. Знайти основи трапеції.	3. Точка дотику вписаного в трапецію кола поділяє бічну сторону на відрізки $9\,см$ і $16\,см$, а іншу – на відрізки у відношенні $4:9$. Знайти основи трапеції.

12 балів

В – V	В – VI
1. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $13\,см$ і $37\,см$, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Обчислити площу трапеції.	1. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $39\,см$ і $15\,см$, а діагоналі перпендикулярні бічним сторонам. Обчислити площу трапеції.
2. В круг вписаний правильний трикутник, сторона якого $8\,см$. Знайти площу сегмента, який відсікає сторона трикутника.	2. Визначити площу кругового сегмента, якщо його відсікає хорда довжиною $10\,см$, а дуга містить $60°$.
3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $128\,см$, а бічна сторона відноситься до основи як $5:6$. Обчислити діаметр вписаного кола.	3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $128\,см$, а бічна сторона відноситься до висоти, проведеної до основи, як $5:4$. Обчислити діаметр описаного кола.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-5

<table>
<tr><th>В – I</th><th>7 балів</th><th>В – II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Сторона AB паралелограма $ABCD$ дорівнює $12\,см$, а висота BM до сторони CD дорівнює $9\,см$. Знайти площу паралелограма.</td><td>1. Знайти площу прямокутника, якщо його сторона $5\,см$, а діагональ $13\,см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Чому дорівнюють сторони прямокутника, якщо вони відносяться як $3:5$, а його площа дорівнює $90\,см^2$.</td><td>2. Знайти площу паралелограма $ABCD$, якщо висота BN, проведена з вершини кута $135°$, поділяє основу на відрізки $AN = 8\,см$, $ND = 12\,см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Знайти сторону ромба, якщо його площа дорівнює $24\,см^2$, а одна з діагоналей $6\,см$.</td><td>3. Діагоналі ромба відносяться як $4:5$, його площа дорівнює $80\,см^2$. Знайти діагоналі ромба.</td></tr>
<tr><th>В – III</th><th>9 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Площа паралелограма дорівнює $48\,см^2$, а висота, проведена до однієї зі сторін, у 3 рази менше цієї сторони. Знайти довжину цієї сторони.</td><td>1. Сторони паралелограма $2\,дм$ і $16\,дм$. Відстань між більшими сторонами $8\,дм$. Знайти відстань між меншими сторонами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Різниця сторін прямокутника дорівнює $7\,см$, а його діагональ – $13\,см$. Знайти площу прямокутника.</td><td>2. Сторони прямокутника відносяться як $3:4$, а його діагональ дорівнює $15\,см$. Знайти площу прямокутника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Висота ромба дорівнює $24\,см$, а його діагоналі відносяться як $3:4$. Знайти площу ромба.</td><td>3. Сторона ромба дорівнює $25\,см$, а різниця його діагоналей $10\,см$. Знайти площу ромба.</td></tr>
<tr><th>В – V</th><th>12 балів</th><th>В – VI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Периметр прямокутника дорівнює $70\,см$, а відстань від вершини до діагоналі – $12\,см$. Знайти площу прямокутника.</td><td>1. З вершин протилежних кутів прямокутника до діагоналі проведені перпендикуляри, відстань між основами перпендикулярів дорівнює $6\,см$. Знайти площу прямокутника, якщо довжина перпендикуляра дорівнює $4\,см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Висоти паралелограма, проведені з вершин тупого кута, дорівнюють $12\,см$ і $15\,см$, а кут між ними $30°$. Знайти площу паралелограма.</td><td>2. Точка дотику кола, вписаного в ромб, поділяє його сторону на відрізки, відношення довжин яких дорівнює 4. Знайти площу ромба, якщо довжина кола $8\pi\,см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Знайти площу паралелограма $ABCD$.

</td><td>3. Знайти площу паралелограма $AK = 5\,см$.

</td></tr>
</table>

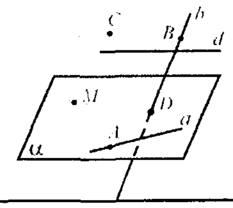
КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-6

В – I	7 балів	В – II
1. Основи рівнобічної трапеції $8\,см$ і $18\,см$, а бічна сторона $13\,см$. Знайти площу трапеції.		1. Бічна сторона трапеції, що дорівнює $40\,см$, утворює з більшою її основою кут у $45°$. Обчислити площу трапеції, якщо її основи дорівнюють $24\,см$ і $60\,см$.
2. Площі двох квадратів відносяться як $4:25$. Чому дорівнює сторона меншого квадрата, якщо сторона більшого квадрата дорівнює $12\,см$?		2. Площі двох квадратів відносяться як $9:16$. Чому дорівнює сторона більшого квадрата, якщо сторона меншого квадрата дорівнює $8\,см$?
3. Визначити площу кругового сегмента, який відсікає хорда довжиною $8\,см$, а дуга містить $120°$.		3. Діаметр круга дорівнює $10\,дм$, а площа кругового сектора $\frac{5}{4}\pi\,дм^2$. Чому дорівнює центральний кут кругового сектора?
4. Сектор кола має площу $\pi\,см^2$, а його центральний кут дорівнює $90°$. Чому дорівнює діаметр кола?		4. Знайти площу кругового сегмента, якщо йому відповідає центральний кут у $150°$, а радіус круга дорівнює $22\,см$.
В – III	**9 балів**	**В – IV**
1. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $15\,см$ і $33\,см$, а діагоналі є бісектрисами гострих кутів. Обчислити площу трапеції.		1. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $11\,см$ і $25\,см$; а діагоналі є бісектрисами тупих кутів. Обчислити площу трапеції.
2. Відповідні діагоналі двох подібних многокутників відносяться як $2:3$, сума площ многокутників $468\,см^2$. Знайти площу кожного з них.		2. Периметри двох подібних многокутників відносяться як $5:7$, різниця площ дорівнює $864\,см^2$. Знайти площу кожного з них.
3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $10\,см$ і $24\,см$. Визначити площу круга, коло якого проходить через усі вершини трикутника.		3. Коло проходить через вершини трикутника, у якого один з кутів $60°$, а сторони, які утворюють кут, дорівнюють $15\,см$ і $24\,см$. Знайти площу круга.
4. Довжина дуги $\frac{\pi}{8}\,см$. Знайти довжину її хорди, якщо градусна міра дуги дорівнює $120°$.		4. Довжина дуги $\frac{3}{4}\pi\,см$. Знайти довжину її хорди, якщо градусна міра дуги дорівнює $120°$.
В – V	**12 балів**	**В – VI**
1. У рівнобічній трапеції основи і бічна сторона відносяться як $31:7:13$, а висота дорівнює $10\,см$. Обчислити площу трапеції.		1. У рівнобічній трапеції різниця основ дорівнює $12\,см$, а периметр – $36\,см$. Обчислити площу трапеції, якщо бічна сторона і основа відносяться як $5:4$.
2. Знайти відношення площі квадрата до площі описаного навколо нього кола.		2. Знайти відношення площі правильного трикутника до площі вписаного в нього кола.
3. Дві сторони трикутника відносяться, як $5:8$, а висота, опущена на третю сторону, поділяє її на відрізки $7\,см$ і $32\,см$. Обчислити площу трикутника.		3. У трикутнику, площа якого дорівнює $24\,см^2$, проведена середня лінія. Знайти площі частин, на які вона поділяє трикутник.
4. В коло вписаний правильний шестикутник, сторона якого $6\,см$. Знайти площу сегмента, що відсікає від кола сторона шестикутника.		4. В коло вписаний правильний десятикутник, сторона якого дорівнює $4\,см$. Знайти площу сегмента, який відсікає від кола сторона десятикутника.

§5. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ З СТЕРЕОМЕТРІЇ

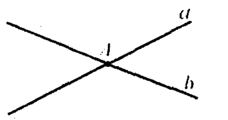
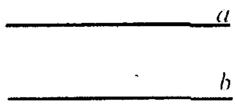
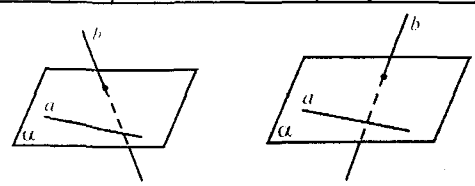
Стереометрія — це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури в просторі.

Основні фігури стереометрії: точка, пряма, площина.

Точки A, B, C, D, M; прямі a, b, d, площина α.	
Точки A, M, D лежать в площині α.	$A \in \alpha,\ M \in \alpha,\ D \in \alpha$.
Точки C і B не лежать в площині α.	$c \notin \alpha, \beta \not\subset \alpha$.
Пряма a лежить в площині α, всі її точки лежать в площині.	$a \in \alpha$: $A \in \alpha$, отже, $A \in \alpha$.
Пряма b не лежить в площині α і має спільну точку D з площиною α. Пряма b перетинає площину α.	$b \notin \alpha$: $B \in b,\ B \notin \alpha$. $D \in b$; $D \in \alpha$, $D -$ точка перетину прямої і площини, $D -$ єдина.
Пряма d не лежить в площині α і не перетинає площину α, не має спільних точок з площиною.	$d \notin \alpha,\ d \not\cap \alpha$.

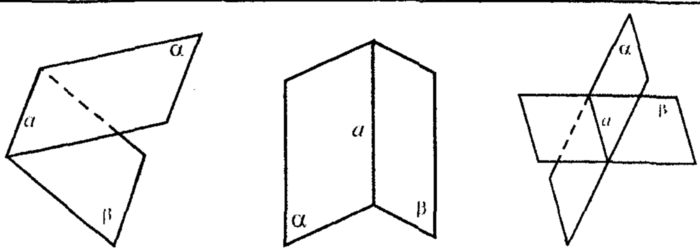
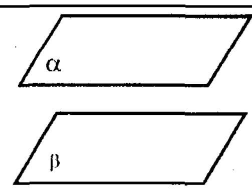
Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Дві різні прямі у просторі або перетинаються, або паралельні, або схрещуються.

		
$a \cap b$, $A \in b$, $A \in a$ a і b перетинаються в точці A. $A -$ єдина.	$a \parallel b$, $a \not\cap b$ a і b паралельні. Спільних точок немає.	$a \not\cap b$; $a \nparallel b$. a не паралельна b і не перетинаються, спільних точок немає, a і b – прямі, що схрещуються.

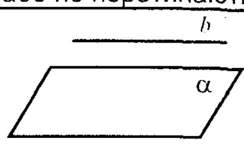
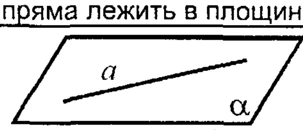
Взаємне розміщення площин у просторі

Дві площини в просторі або перетинаються, або не перетинаються.

	
$\alpha \cap b$; $a \in \alpha$, $a \in \beta$. a – пряма перетину α і β. α і β мають множину спільних точок, що лежать на прямій перетину a.	$\alpha \not\cap \beta$; $\alpha \parallel \beta$ α і β не мають спільних точок. α і β – паралельні.

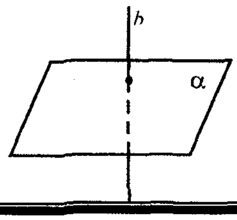
Взаємне розміщення прямої та площини

Пряма і площина або перетинаються, або не перетинаються, або пряма лежить в площині.

		
$b \cap \alpha$; $b \notin \alpha$. $A \in b$, $A \in \alpha$. Єдина спільна точка.	$b \not\cap \alpha$; $b \notin \alpha$ Спільних точок немає. $b \parallel \alpha$. b і α паралельні.	$a \not\cap \alpha$, $a \nparallel \alpha$ $a \in \alpha$. Усі точки прямої a лежать в площині α.

Перпендикуляр до площини

Пряма, яка перетинає площину під кутом 90°, називається перпендикуляром до площини.



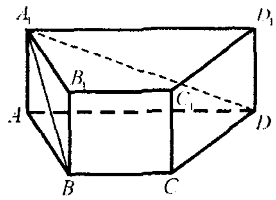
$b \cap \alpha.$

$b \perp \alpha.$

МНОГОГРАННИКИ. ПРИЗМА

<u>Призмою</u> називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать в різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які з'єднують відповідні точки цих многокутників.

Призма називається <u>прямою</u>, якщо її бічні ребра перпендикулярні основам.



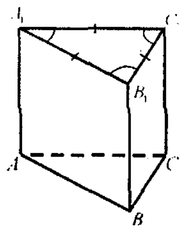
$ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – основи призми.

AA_1; BB_1; CC_1; DD_1 – бічні ребра. A_1D – діагональ призми.

A_1B – діагональ бічної грані. $AA_1 \perp (ABCD)$; $BB_1 \perp ABCD$...

AA_1B_1B; BB_1C_1C; CC_1D_1D; DD_1A_1A – бічні грані (прямокутники).

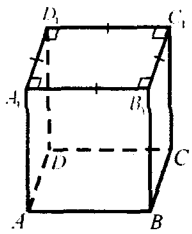
Пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними многогранниками.



трикутна

ΔABC – правильний,

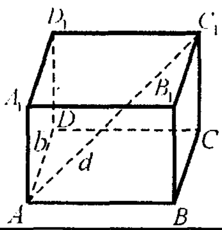
грані – рівні прямокутники.



чотирикутна

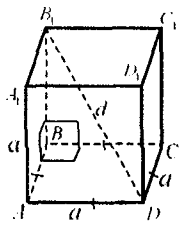
$ABCD$ – квадрат.

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається <u>прямокутним паралелепіпедом</u>.



Бічні грані і основи – прямокутники.

<u>Кубом</u> називається прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні.



Всі грані – рівні квадрати.

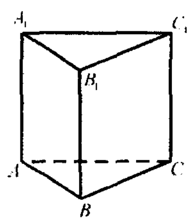
$ABCD = DD_1C_1C = ...$

Бічна поверхня та об'єм прямолінійної призми

Бічна поверхня призми – це сума площин всіх бічних граней.

<u>Бічна поверхня</u> призми дорівнює добутку периметра основи і висоти призми.

Об'єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту призми.

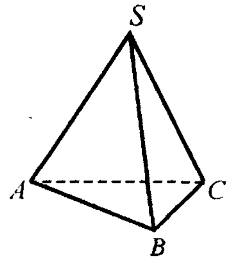


$S_{бічн.} = P_{осн.} \cdot AA_1$

$V = S_{осн.} \cdot H = S_{осн.} \cdot AA_1$

Піраміда

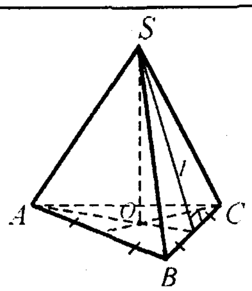
Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника, точки, яка не лежить в площині основи, та всіх відрізків, які з'єднують вершину піраміди з точками основи.



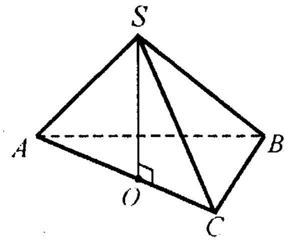
$S \notin (ABC)$. S – вершина;

ΔABC – основа, всі грані – трикутники.

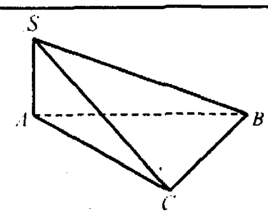
(ASB), (BSC), (ASC) – бічні грані. SA, SB, SC – бічні ребра.



SO – висота піраміди.
SM – висота бічної грані.



Грань ASC перпендикулярна площині основи.
SO – висота піраміди і висота бічної грані ASC.

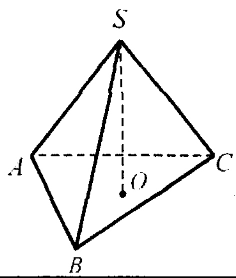


Грані ASC і BSC перпендикулярні площині основи.
AS – їх спільне бічне ребро.
AS – висота піраміди та бічних граней ASC і ASB.

Бічна поверхня та об'єм піраміди

Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ бічних граней піраміди.

Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту піраміди.



$$S_{бічн.пір.} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta ASC}$$

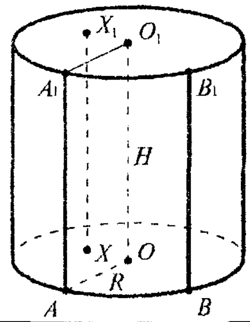
$$V_{пір.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO$$

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

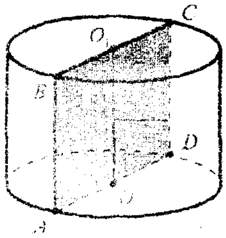
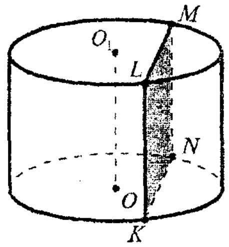
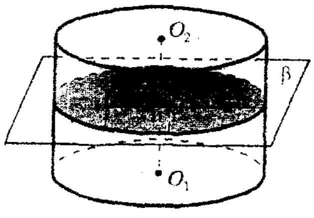
Циліндр

Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, яке складається із двох кругів, що не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що з'єднують відповідні точки цих кругів.

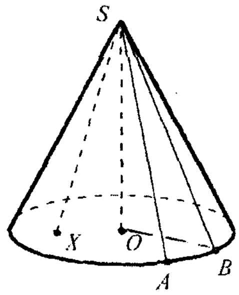
Основи – рівні круги. Твірні є висотами циліндра.



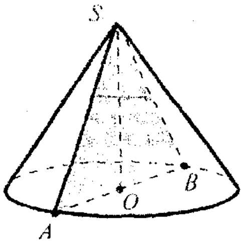
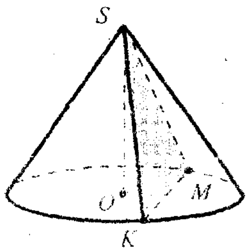
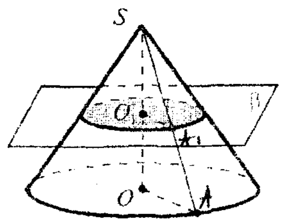
Види перерізів циліндра

 Осьовий переріз $ABCD$ – прямокутник. $AD=2R$, $AB=H$.	 Переріз площиною, яка паралельна осі. $MNKL$ – прямокутник. KN – хорда, $MN=H$.	 Переріз площиною, яка паралельна основам. Переріз – круг, рівний основам.

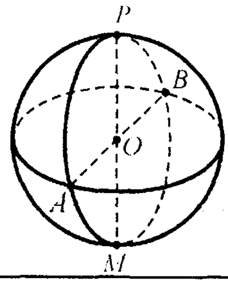
Конус

<u>Конусом</u> (круговим конусом) називається тіло, яке складається із круга, точки, яка не лежить в площині цього круга, і всіх відрізків, що з'єднують задану точку з точками круга.		Основа – круг з центром у точці O, $R=OB$. S – вершина конуса, SA, SB – твірні, SO – висота конуса.

Види перерізів конуса

 Осьовий переріз. ΔSAB – рівнобедрений; SO – медіана, висота, бісектриса, $AB=2R$.	 Переріз площиною, що проходить через вершину. ΔSKM – рівнобедрений; KM – хорда.	 Переріз площиною, яка паралельна основі. Переріз – круг, $O_1A_1 = R$ перерізу, $OA = R$ конуса, $O_1A_1 \angle OA$.

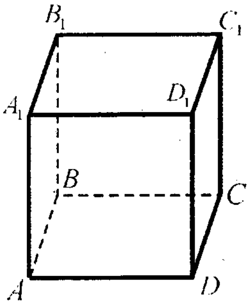
Куля

<u>Кулею</u> називається тіло, яке складається з усіх точок простору, що знаходяться на відстані, не більшій даної, від даної точки. Задана відстань – це радіус кулі. Задана точка – це центр кулі. Куля утворюється при обертанні півкруга навколо свого діаметра.		O – центр кулі, $AO = R$ – радіус кулі, $AB = 2R$ – діаметр кулі, P, M – полюси кулі, PM – вісь кулі.

Бічна поверхня кулі $S_{бічн.} = 4\pi R^2$.	Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1. Обчислити площу повної поверхні і об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює $910\,дм^2$, а висота складає $17,5\,дм$.

Розв'язання.



Повна поверхня призми дорівнює сумі бічної поверхні і площі основ.

$S_{повн.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$; $S_{бічн.} = P_{осн.} \cdot H$.

$P_{осн.} = 4AD$; $H = 17,5\,см$. $S_{бічн.} = 4 \cdot AD \cdot H$,

$AD = \dfrac{S_{бічн.}}{4 \cdot H} = \dfrac{910}{4 \cdot 17,5} = 13\,(см)$.

$S_{осн.} = AD^2$, оскільки основа піраміди – квадрат.

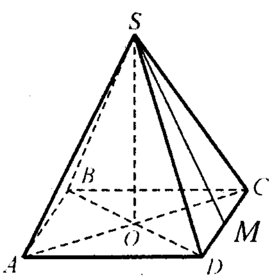
$S_{осн.} = 13^2 = 169\,(дм^2)$. $S_{повн.} = 910 + 2 \cdot 169 = 910 + 338 = 1248\,(дм^2)$.

$V = S_{осн.} \cdot H = 169 \cdot 17,5 = 2957,5\,(дм^3)$.

Відповідь: $1248\,дм^2$; $2957,5\,дм^3$.

2. Скільки квадратних метрів полотна витратили на виготовлення намету, який має форму правильної чотирикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює $3,2\,м$, а апофема піраміди $5,1\,м$? (Витрата матеріала на шви і обрізки складає 8% бічної поверхні піраміди).

Розв'язання.



Витрата тканини на виготовлення намету дорівнює площі бічної поверхні піраміди $SABCD$ і витраті на шви та обрізки при шитті.

$S_{бічн.пір.} = 4 \cdot S_{бічн.гр.} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot DC \cdot SM$, де SM – апофема піраміди.

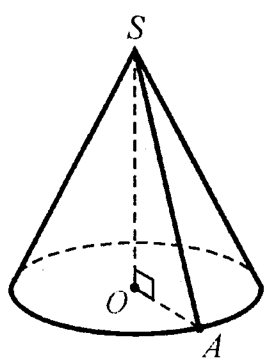
$S_{бічн.пір.} = 2 \cdot 3,2 \cdot 5,1 = 32,64\,(м^2)$. Знайдемо витрату тканини на шви та обрізки: $32,64 \cdot 0,08 = 2,6112 \approx 2,6\,(м^2)$.

Витрата тканини на виготовлення намету дорівнює: $32,64 + 2,6 \approx 35,24\,(м^2)$.

Відповідь: $35,2\,м^2$.

3. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють $36\,см$ і $10,5\,см$, обертається навколо одного катета. Визначити повну поверхню і об'єм утвореного при цьому конуса.

Розв'язання.



ΔSAO обертається навколо катета SO; $\angle SOA = 90°$.

Нехай $SO = 36\,см$, $AO = 10,5\,см$.

$S_{повн.} = S_{бічн.} + S_{осн.}$; $S_{бічн.} = \pi \cdot OA \cdot SA$ ($OA = R$; SA –твірна конуса).

$S_{осн.} = \pi \cdot OA^2$.

За теоремою Піфагора із $\Delta SOA\,(\angle SOA = 90°)$:

$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 10,5^2} = \sqrt{1296 + 110,25} = 37,5\,(см)$.

$S_{бічн.} = \pi \cdot 10,5 \cdot 37,5 = 393,75\pi\,(см^2)$.

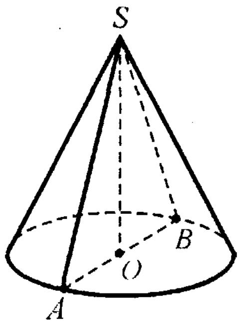
$S_{осн.} = \pi \cdot 10,52 = 110,25 \cdot \pi\,(см^2)$. $S_{повн.} = (393,75 + 110,25) \cdot \pi = 504\pi\,(см^2)$.

$V_{кон.} = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 110,25 \cdot 36 = 1323\,(см^3)$.

Відповідь: $504\pi\,см^2$; $1323\pi\,см^3$.

4. Латунна куля радіусом R переплавлена в конус, осьовий переріз якого — рівносторонній трикутник. Знайти висоту конуса.

Розв'язання.



Шуканий конус має радіус $AO = r$, $H = SO$. ΔSAO – осьовий переріз. ΔSAO – правильний за умовою. Оскільки кулю переплавили в конус, то об'єм кулі дорівнює об'єму конуса. (Конус і куля – рівновеликі тіла.) Куля має радіус R.

$$V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi R^3;\ V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Розглянемо ΔSOB – прямокутний; $\angle SOB = 90^\circ$, $\angle SBO = 60^\circ$, оскільки ΔSAB – правильний. $SO = BO \cdot tg\angle SBO = r \cdot tg60^\circ$.

$H = r \cdot tg60^\circ$, тоді $V_{кон.} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r tg60^\circ = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}$.

Складемо рівняння $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}$, $4R^3 = r^3\sqrt{3}$, $r^3 = \frac{4}{\sqrt{3}}R^3$; $r = R\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}}$,

тоді $H = R\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}}}\sqrt{3} = R\sqrt[6]{\frac{4^2}{3}} \cdot \sqrt[6]{3^3} = R\sqrt[6]{4^2 \cdot 3^2} = R\sqrt[3]{4 \cdot 3} = R\sqrt[3]{12}$.

Відповідь: $R\sqrt[3]{12}$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Чи можна провести площину через чотири точки, якщо вони лежать на одній прямій?
2. Чи можна провести дві різні площини через дві точки?
3. Чи можна провести через пряму дві різні площини?
4. Чи вірно, що три прямі, що проходять через одну точку, можуть не лежати в одній площині?

5.

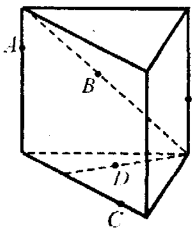


Рис. 1

На рис.1 зображена трикутна призма. Які з точок A, B, C, D, E і F лежать в площині нижньої основи призми?

Зображення точок A, D і C, а так само точок A, B і F, лежать на одній прямій. Чи лежать в дійсності ці точки на одній прямій?

6.

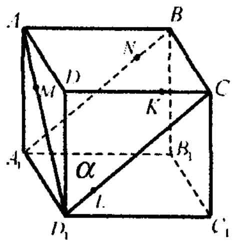


Рис. 2

На рис. 2 зображена площина α і точки A, B, C і D. Які з цих точок лежать в площині α? Чи перетинаються прямі BC і AD? AB і BC? Які з проведених прямих лежать в площині?

7. Кожне бічне ребро і сторони основи правильної трикутної піраміди дорівнюють $1 дм$. Як зміниться повна поверхня цієї піраміди, якщо кожне бічне ребро і кожну сторону основи зменшити у 2 рази?

8. В основі прямої призми лежить чотирикутник зі сторонами $6, 7, 8$ і $9 см$. Бічне ребро призми дорівнює $10 см$. Обчислити бічну поверхню призми.

9. Радіус кола, описаного навколо основи правильної призми, дорівнює $2\sqrt{3} см$. Бічне ребро призми дорівнює $10 см$. Обчислити площу бічної поверхні цієї призми.

10. Основою піраміди є трикутник, площа якого $60 см^2$. Радіус кола, вписаного в нього, $5 см$. Висоти всіх бічних граней $10 см$. Обчислити бічну поверхню піраміди.

11. Основою піраміди є ромб, висота якого $6 см$, а площа $60 см^2$. Висоти всіх бічних граней дорівнюють $10 см$. Обчислити бічну поверхню піраміди.

12. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого $8 см$. Обчислити бічну поверхню циліндра.

13. Площа основи циліндра $64\pi\ см^2$, його висота $10 см$. Обчислити площу бічної поверхні циліндра.

14. Висота циліндра $12 см$, а діаметр його основи $10 см$. Обчислити площу повної поверхні циліндра.

15. В основі конуса проведена хорда, довжина якої $50 см$. Ця хорда віддалена від вершини конуса на $60 см$. Обчислити радіус основи конуса, якщо його висота дорівнює $52 см$.

16. Висота конуса зменшена у 3 рази. У скільки разів треба збільшити діаметр основи, щоб об'єм конуса не змінився? (Відповідь пояснити.)

17. Як зміниться поверхня кулі, якщо її діаметр збільшити вдвічі? (Відповідь пояснити.)

18. Яке відношення радіусів двох куль, якщо їхні об'єми відносяться як $64:27$? (Відповідь пояснити.)

19. У правильній трикутній призмі радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $2 см$, а діагональ бічної грані дорівнює $2\sqrt{15}\ см$. Обчислити об'єм цієї призми.

20. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює $6 см$, а висота, проведена до нього, $4 см$. Основою висоти піраміди є вершина даного трикутника. Більше бічне ребро дорівнює $13 см$. Обчислити об'єм піраміди.

21. В основі піраміди лежить прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює $6 см$, а радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює $5 см$. Всі бічні ребра піраміди дорівнюють $13 см$. Обчислити об'єм піраміди.

22. В нижній основі циліндра хорда, яка дорівнює $6 см$, знаходиться від його осі на відстані $4 см$. Обчислити об'єм циліндра, якщо відстань від центра верхньої основи до кінця цієї хорди дорівнює $13 см$.

23. У циліндрі на відстані $4 см$ від його осі і паралельно їй проведений переріз, діагональ якого дорівнює $6\sqrt{5}\ см$. Обчислити об'єм циліндра, якщо його радіус $5 см$.

САМОСТІЙНА РОБОТА С-5-1

Тема. Бічна поверхня та об'єм многогранників і тіл обертання

<table>
<tr><th>В – І</th><th>9 балів</th><th>В – ІІ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами $3 см$ і $4 см$. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, дорівнює $13 см$. Обчислити бічну поверхню призми.</td><td>1. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює $10 см$. Обчислити бічну поверхню призми, якщо радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $2\sqrt{3}\ см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}\ см$, а висота її основи дорівнює $2\sqrt{3}\ см$. Обчислити об'єм піраміди.</td><td>2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $6 см$, а її висота $5\sqrt{3}\ см$. Обчислити об'єм піраміди.</td></tr>
<tr><th>В – ІІІ</th><th>10 балів</th><th>В – IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює $13 см$. Обчислити бічну поверхню призми, якщо радіус кола, вписаного в основу, дорівнює $2\sqrt{3}\ см$.</td><td>1. У правильній трикутній призмі радіус кола, вписаного в основу, дорівнює $2\sqrt{3}\ см$. Діагональ бічної грані утворює із площиною основи кут 45°. Обчислити бічну поверхню призми.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Основа піраміди – прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють $8 см$ і $6 см$. Висота піраміди дорівнює $10 см$. Обчислити об'єм піраміди.</td><td>2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $10 см$. Обчислити об'єм піраміди, якщо її висота $10\sqrt{3}\ см$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною $4 см$. Обчислити повну поверхню циліндра.</td><td>3. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого $64 см^2$. Обчислити площу бічної поверхні циліндра.</td></tr>
</table>

12 балів

В – V	В – VI
1. У правильній трикутній призмі площа основи дорівнює $4\sqrt{3}\ см^2$. Діагональ бічної грані дорівнює $5\ см$. Обчислити бічну поверхню призми.	1. В основі прямої призми лежить ромб із діагоналями $10\ см$ і $24\ см$. Менша діагональ призми дорівнює $26\ см$. Обчислити повну поверхню призми.
2. Основою піраміди є прямокутний трикутник. Усі бічні ребра піраміди рівні. Основа висоти піраміди знаходиться на відстанях $3\ см$ і $4\ см$ від катетів цього трикутника. Висота піраміди дорівнює $10\ см$. Обчислити її об'єм.	2. Основою піраміди є ромб, діагоналі якого дорівнюють $8\ см$ і $6\ см$. Висота піраміди дорівнює $16\ см$. Обчислити її об'єм.
3. У циліндрі паралельно його осі проведений переріз, діагональ якого дорівнює $20\ см$. Цей переріз перетинає нижню основу циліндра по хорді, довжина якої $16\ см$. Обчислити бічну поверхню циліндра, якщо відстань від центра верхньої основи до цієї хорди дорівнює $6\sqrt{5}\ см$.	3. У циліндрі на відстані $24\ см$ від його осі і паралельно їй проведений переріз, діагональ якого дорівнює $25\ см$. Обчислити бічну поверхню циліндра, якщо цей переріз перетинає основу по хорді, довжина якої $20\ см$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА К-7

9 балів

В – I	В – II
1. Купа піску має форму конуса, довжина обводу основи якого дорівнює $62{,}8\ м$, а твірна його – $11{,}6\ м$. Визначити вагу піску, якщо $1\ м^3$ його важить $1{,}6\ т$.	1. Скільки квадратних метрів парусини пішло на виготовлення намету, який має форму правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи $4{,}5\ м$ і висотою $2{,}5\ м$. (Витрата матеріалу на шви складає 8% готової поверхні піраміди.)
2. Основа трикутної призми – прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють $13{,}5\ см$ і $1{,}8\ дм$; висота призми $45\ см$. Визначити повну поверхню і об'єм призми.	2. Поперечний переріз дерев'яного бруска – рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює $5{,}2\ см$. Довжина бруска $4{,}8\ м$. Визначити вагу бруска, якщо $1\ см^3$ дерева важить $0{,}79\ г$.

10 балів

В – III	В – IV
1. Обчислити повну поверхню і об'єм правильної шестикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює $1{,}2\ дм$, а висота піраміди $4{,}8\ дм$.	1. Дах альтанки, що має форму конуса, довжина кола основи якого дорівнює $13\ м$, а висота $1{,}9\ м$, покрита оцинкованою жерстю. Скільки жерсті витрачено на покриття даху? (На шви і загини пішло 10% від загальної кількості витраченої на покриття жерсті.)
2. Визначити бічну поверхню і об'єм правильної шестикутної призми, якщо сторона основи її дорівнює $10{,}6\ см$, а висота – $3{,}6\ дм$.	2. Визначити повну поверхню і об'єм правильної трикутної призми, якщо сторона трикутника основи дорівнює $10{,}5\ см$, висота трикутника $9{,}4\ см$, а висота призми $5{,}2\ дм$.

12 балів

В – V	В – VI
1. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють $12{,}5\ см$ і $8{,}5\ см$, обертається навколо одного з катетів. Визначити повну поверхню і об'єм конуса, що утворився при цьому.	1. Визначити повну поверхню і об'єм правильної піраміди, сторона основи якої дорівнює $4{,}8\ м$, а бічне ребро має $3{,}5\ м$.
2. Силосна башта має форму правильної шестикутної призми, сторона основи якої дорівнює $2{,}6\ м$. Висота башти $11{,}9\ м$. Скільки зеленої маси можна покласти на силос у башту? (Питома вага силосу $0{,}8$.)	2. Визначити поверхню і об'єм правильної шестикутної призми, сторона якої дорівнює $6{,}8\ дм$, а висота – $5{,}5\ дм$.

ВІДПОВІДІ

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

§1. 3. 6 *м*; 2 *м*. **4.** $2\frac{2}{3}$ *см*; 3 *см*; $3\frac{1}{3}$ *см*. **7.** $2\frac{5}{8}$ *см*; $1\frac{7}{8}$ *см*. **8.** 13,5 *см*; 18 *см*; 27 *см*. **11.** Так.

13. 25 *см*; 30 *см*; 40 *см*. **17.** $\frac{25}{13}$ *см*. **18.** 6. **20.** 8 *см*. **21.** а) $90°$; б) $120°$; в) $40°$. **22.** 5 *см*.

23. 6 *см*; 4 *см*. **24.** 10 *см*; $10\sqrt{2}$ *см*. **25.** 8 *см*; 12 *см*. **26.** $28°$. **27.** Так. **28.** 12 *см*. **29.** 72 *см*.

30. $130°$. **31.** 15 *см*; 20 *см*. **32.** 18 *см*. **33.** $AC\cdot BC = CD^2$. **34.** $50°$; $60°$; $70°$.

§2. 1. $\sqrt{7}$. **2.** $\sqrt{106}$. **3.** 1. **5.** Прямокутний. **7.** $3\sqrt{10}$ *см*. **8.** 10 *см*. **9.** 6 *см*; 7 *см*. **10.** Ні.

11. $\approx 5{,}46$. **12.** $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(180°-(45°+\alpha))}$. **13.** 13 *см*. **14.** 18 *см*; 11 *см*. **15.** 15 *см*. **16.** 7 *см*. **17.** $4\sqrt{3}$ *см*.

18. $\angle A=75°$; AC=122 *см*; BC=13,7 *см*. **19.** $\angle BCA = 30°$; $\angle A = 45°$; $AC \approx 9{,}7$ *см*; $BC \approx 7{,}1$ *см*.

20. а) $b \approx 3{,}1$; $c \approx 4{,}4$; $\angle A = 105°$; б) $c \approx 28$; $\alpha \approx 11°$; $\beta \approx 39°$; в) $\beta \approx 13°$; $\gamma \approx 29°$; $c \approx 19{,}6$;

г) $\alpha \approx 54°$; $\beta \approx 13°$; $\gamma \approx 113°$. **21.** а) $3{,}26$; б) $105°$; в) $x \approx 11{,}9$. **22.** $4\sqrt{3}$ *см*.

23. 48,4 *см*; 11,6 *см*; 11,6 *см*. **24.** $\approx 29{,}6$ *см*. **25.** а) $c \approx 15{,}3$; $b \approx 13{,}4$; $\gamma \approx 80°$;

б) $\alpha \approx 136°$; $\beta \approx 15°$; $\gamma \approx 29°$; в) $c \approx 22{,}3$; $\beta \approx 6°$; $\gamma \approx 10°$; г) $\alpha \approx 16°$; $\gamma \approx 12°$; $b \approx 53{,}4$.

26. 10,4 *см*; 10,4 *см*; 9,4 *см*. **27.** $\approx 19{,}4$ *см*; $\approx 9{,}6$ *см*; $\approx 13{,}8$ *см*; ≈ 5 *см*.

28. $108°13'$; $49°27'$; $22°20'$. **29.** $\alpha \approx 70°$; $\beta \approx 78°$; $\gamma \approx 32°$. **30.** 1; $\sqrt{2}$.

§3. 1. $360°$. **2.** $36°; 72°; 108°; 144°$. **3.** Ні. **5.** $135°; 144°$. **6.** $45°; 36°$. **7.** 6. **8.** 4. **9.** 13. **11.** 5.

16. 4 *см*; 8 *см*. **17.** $160°; 200°$. **18.** $8\sqrt{2}\pi$ *см*. **19.** $2\sqrt{2}$ *см*. **20.** 16 *см*. **21.** 24π. **22.** 5π *см*.

23. 12 *см*; $8\sqrt{3}\pi$ *см*. **24.** 10π *см*. **25.** $4\sqrt{6}$ *см*. **26.** 12π *см*. **27.** $l \approx 5\pi$ *см*. **28.** 21 *см*.

§4. 1. 40 *см*^{2}. **2.** $2\sqrt{3}$ *см*. **3.** 11 *см*; 14 *см*. **4.** 80 *см*^{2}. **5.** 36 *дм*. **6.** 40 *см*^{2}. **7.** 60 *см*^{2}.

8. $a = 5$ *см*; $b = 4$ *см*. **9.** 6 *см*. **10.** $\frac{240}{17}$ *см*^{2}. **11.** $32\sqrt{3}$ *см*^{2}. **12.** 40 *см*^{2}. **13.** 240 *см*^{2}. **14.** 60 *см*^{2}.

15. 4 *см*. **16.** $45°; 135°$. **17.** 448 *см*^{2}. **18.** 85 *см*^{2}. **19.** 24 *см*^{2}. **20.** 126 *см*. **21.** 7 *см*. **22.** 12 *см*^{2}.

23. 30 *см*^{2}. **24.** 12 *см*. **25.** $150°$. **26.** 8 *см*^{2}. **27.** $\frac{48}{13}$ *см*. **28.** 16 *см*.

29. $R \approx 76{,}7$ *см*; $r \approx 1{,}7$ *см*. **30.** 27 *см*^{2}. **31.** 30 *см*^{2}. **32.** 864 *см*^{2}. **33.** 280 *см*^{2}. **34.** 144 *см*^{2}.

35. 230 *см*^{2}. **36.** 144π *см*^{2}.

37. 8π *см*^{2}. **38.** 144 *см*^{2}. **39.** 936 *см*^{2}. **40.** 12 *см*^{2}. **41.** $45°$. **42.** $\approx 2{,}28$ *см*^{2}. **43.** 468 *см*^{2}.

44. 25 *см*; 12 *см*. **45.** 588 *см*^{2} **46.** а) 30 *см*^{2}; б) 3π *см*^{2}; в) $12{,}5\pi$ *см*^{2}; г) $\approx 13{,}8$ *см*^{2}. **47.** 45 *см*^{2}.

§5. 19. 36 *см*^{3}. **22.** 192 *см*^{3}. **23.** 300 *см*^{3}.

САМОСТІЙНІ РОБОТИ

С-1-1. В-І. 2. $\angle A_1 = 65°; \angle C_1 = 55°; \angle B_1 = 60°$. **В-ІІ. 2.** $MN = 5$ *см*; $ND = 7$ *см*.

В-ІІІ. 2. 12 *см*; 4 *см*. **3.** Так. **В-IV. 2.** 1 *см*; $1\frac{2}{3}$ *см*; $2\frac{1}{3}$ *см*. **3.** Так. **В-V. 1.** Так.

2. 24 *см*; 28 *см*; 32 *см*.

В-VI. 1. Так. **2.** 120 *см*; 40 *см*.

С-1-2. В-І. 2. 24 *см*; 32 *см*. **В-ІІ. 1.** Так. **2.** 2,25 *см*. **В-ІІІ. 1.** 12 *см*. **2.** $110°$. **3.** 12 *см*. **В-IV. 1.** 20 *см*.

2. $45°; 60°; 75°$. **3.** 8 *см*. **В-V. 1.** $\sqrt{5}$ *см*; $3\sqrt{5}$ *см*. **2.** 252 *см*. **3.** $52°30'$; $60°$; $67°30'$.

В-VI. 1. $6\sqrt{6}$ *см*, $8\sqrt{6}$ *см*. 2. 112 *см*; 63 *см*. 3. 60°, 40°, 100°, 160°.

С-2-1. В-I. 1. $3\sqrt{2}$ *см*. 3. 7,3 *см*. В-II. 1. ≈ 7,8 *дм*. 2. Hi. 3. ≈ 5,8 *см*; ≈ 4,1 *см*.

В-III. 1. ≈ 10,8 *см*; ≈ 7 *см*. 2. 5,5 *см*; 7,5 *см*. 3. 8 *см*. В-IV. 1. 18,4 *см*; 10,7 *см*.

2. 15 *см*; 25 *см*. 3. $2\sqrt{6}$ *м*. В-V. 1. ≈ 3,7 *см*. 2. $\dfrac{c\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 3. $4\sqrt{7}$ *см*. В-VI. 1. ≈ 4,9 *см*.

2. $\dfrac{c\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. 3. 15 *см*; 25 *см*.

С-2-2. В-I. 1. а) $\alpha = 76°$; $a = 10{,}4$ *см*.; $c = 8{,}9$ *см*; б) $\angle\alpha = 41°$; $\angle\beta = 79°$; $\angle\gamma = 60°$. 2. BD.

В-II. 1. а) $a = 10{,}6$ *см*; $c \approx 9{,}5$ *см*; $\angle\gamma = 49°$; б) $\alpha \approx 35°$; $\beta \approx 115°$; $\gamma \approx 26°$. 2. AB.

В-III. а) ≈ 6,8 *см*; б) ≈ 6,1 *см*; в) ≈ 7 *см*.; г) ≈ 7,3 *см*; д) ≈ 4,42 *см*.

2. $\angle B \approx 13°$; $\angle C \approx 57°$; $AC \approx 2{,}4$ *см*.

В-IV. 1. $AB = 4{,}2$ *см*; $AK = 4{,}1$ *см*; $BM = 6{,}7$ *см*; $AD = 4{,}7$ *см*; $R = 6$ *см*.

2. $BC \approx 19$ *см*, $\angle B = 17°$, $\angle C \approx 18°$. В-V. 1. а) 7,9 *см*.; б) 7,6 *см* и 3,6 *см*; в) 4,2 *см*.

2. 10,5 *см*, 5°, 25°. В-VI. 1. а) 8,6 *см*.; б) ≈ 10 *см*; в) ≈ 6 *см*. 2. 9,4 *см*, 37°, 8°.

С-3-1. В-I. 1. Hi. 2. 10 *см*; 15 *см*; 20 *см*; 40 *см*. 3. 8 *см*. В-II. 1. Hi. 2. 16 *см*; 40 *см*; 32 *см*; 64 *см*. 3.

10. В-III. 1. 135°;45°. 2. 9. 3. $8\sqrt{3}$ *см*. В-IV. 1. 144°;36°. 2. 4. 3. $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

В-V. 1. 42°, 63°, 105°, 150°. 2. 10. В-VI. 1. 180°, 150°, 60°. 2. 8.

С-3-2. В-I. 1. $\dfrac{180°}{\pi}$. 2. 57°;45°. 3. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *см*; $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ *см*. В-II. 1. 9°. 2. 171°;18°. 3. $3\sqrt{3}$ *см*; 6 *см*.

В-III. 1. $\dfrac{4}{3}\pi$ *см*. 2. $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ *см*; 15 *см*. 3. $3\sqrt{2}$ *см*. В-IV. 1. $\dfrac{3}{\pi}$ *см*. 2. $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ *см*. 3. 12 *см*.

В-V. 1. $6\sqrt{3}$ *см*; 12 *см*. 2. 24π *см*. 3. 3. В-VI. 1. $6\sqrt{3}$ *см*. 2. 24π *см*. 3. 6.

С-4-1. В-I. 1. $16\sqrt{3}$ *см*^{2}. 2. 48 *см*^{2}. 3. 30°. В-II. 1. 576 *см*^{2}. 2. $72\sqrt{2}$ *см*^{2}. 3. 60°. В-III. 1. 10 *см*.

2. 11 *см* и 14 *см*. 3. 45°. В-IV. 1. 4 *см*. 2. $108\sqrt{3}$ *см*. 3. 24 *см*. В-V. 1. 24 *см* 2. 480 *см*^{2}. 3. 5616 *см*^{2}.

В-VI. 1. 68 *см*. 2. 72 *см*^{2}. 3. 108 *см*^{2}.

С-4-2. В-I. 1. 180 *см*^{2}. 2. 14 *см*^{2}. 3. 5 *см*^{2}. В-II. 1. 5 *см*^{2}. 2. 60 *см*^{2}. 3. 156 *см*^{2}. В-III. 1. 40 *см*.

2. $8\dfrac{1}{8}$ *см*. 3. 150 *см*^{2}. В-IV. 1. 6,6 *см*. 2. 2 *см*. 3. 150 *см*^{2}. В-V. 1. 294 *см*^{2}. 2. $8\sqrt{21}$ *см*^{2}. 3. 4 *см*.

В-VI. 1. 96 *см*^{2}. 2. 128 *см*. 3. 4 *см*.

С-4-3. В-I. 1. 27,5 *см*^{2}. 2. $\dfrac{64}{3}\pi$. 3. 112,5 *см*^{2}. В-II. 1. 77 *см*^{2}. 2. $\dfrac{5\pi}{2}$ *см*^{2}. 3. 43,2 *см*^{2}. В-III. 2. 20°.

3. 34 *см* и 17 *см*. В-IV. 1. 6 *см*; 18 *см*. 2. $4\sqrt{2}$ *см*. 3. 34 *см* и 17 *см*. В-V. 1. 625 *см*^{2}. 2. 12,9 *см*^{2}.

3. 24 *см*. В-VI. 1. 486 *см*^{2}. 2. 4,7 *см*^{2}. 3. 50 *см*.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

К-1. В-І. 1. $130°$. **2.** $22{,}5$ *м.* **3.** Так. **В-ІІ. 1.** $140°$. **2.** 16 *м.* **3.** Так. **В-ІІІ. 1.** $\frac{60}{17}$ *см.* **2.** $90°; 60°; 30°$.
3. 12 *см.* **В-IV. 1.** $2\frac{4}{7}$ *см*; $5\frac{1}{7}$ *см.* **2.** $150°$. **3.** 15 *см*; 20 *см.* **В-V. 1.** 10 *см.* **2.** $\frac{60}{41}$ *см*, $\frac{180}{41}$ *см.*
3. 21 *см*; 28 *см.* **В-VI. 1.** 12 *см*; 24 *см.* **2.** $6\frac{6}{13}$ *см.* **3.** 60 *см*; 48 *см*; 36 *см.*

К-2. В-І. 1. $9{,}9$ *см*; $10{,}2$ *см*; $\angle B = 70°$. **2.** $\approx 22{,}8$ *см.* **3.** 14 *см.* **В-ІІ. 1.** $\approx 62°; \approx 63°; 3{,}6$ *см.*
2. 7 *см*; $\approx 11{,}4$ *см.* **3.** $2{,}3$ *см.* **В-ІІІ. 1.** $39°; 56°; 85°$. **2.** $\approx 6{,}6$ *см*; ≈ 11 *см.* **3.** 15 *см.*
В-IV. 1. $\approx 14{,}5$ *см*; $\approx 31°; \approx 39°$. **2.** $8{,}9$ *см.* **3.** 8 *см.* **В-V. 1.** $b \approx 9{,}8$; $c \approx 10$; $\gamma = 80°$. **2.** 28 *см.*
3. $\frac{12\sqrt{2}-12}{\sqrt{2}-2}$; $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$. **4.** $\approx 23{,}5$ *см.* **В-VI. 1.** $c \approx 12$, $\beta \approx 33°, \gamma = 108°$. **2.** 28 *см.*
3. $\frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; $\frac{24\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$. **4.** $3{,}3$ *см*; $9{,}1$ *см*; $5{,}6$ *см*; $6{,}4$ *см.*

К-3. В-І. 1. 8 *см*; $8\sqrt{2}$ *см.* **2.** $\frac{8\pi}{3}$. **3.** 10 *см.* **В-ІІ. 1.** $6\sqrt{3}$ *см.* **2.** 6 *см.* **3.** 12 *см.* **В-ІІІ. 1.** $5\sqrt{3}$ *см.*
2. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ *см.* **3.** $\approx 77{,}5$ *см.* **4.** 12 *см.* **В-IV. 1.** $8\sqrt{3}$ *см.* **2.** $\frac{10\pi}{3}$ *см.* **3.** 128 *см.* **4.** 12 *см.*
В-V. 1. 2 *см.* **2.** 6. **3.** 12 *см.* **4.** 13 *см.* **В-VI. 1.** 5 *см.* **2.** 5. **3.** 15 *см*; 22 *см.* **4.** 25 *см.*

К-4. В-І. 1. 108 *см*^{2}. **2.** 6 *см*; 15 *см.* **3.** 5 *см.* **В-ІІ. 1.** 60 *см*^{2}. **2.** $\frac{320}{\sqrt{2}}$ *см*^{2}. **3.** $8\sqrt{2}$ *см*; $10\sqrt{2}$ *см.*
В-ІІІ. 1. 12 *см.* **2.** 60 *см*^{2}. **3.** 600 *см*^{2}. **В-IV. 1.** 1 *м.* **2.** 300 *см*^{2}. **3.** 600 *см*^{2}. **В-V. 1.** 300 *см*^{2}.
2. 48 *см*^{2}. **3.** $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ *см*^{2}. **В-VI. 1.** $8-\sqrt{26}$ *см*^{2}. **3.** $25\sqrt{2}$ *см*^{2}.

К-5. В-І. 1. 432 *см*^{2}. **2.** $4{,}8$ *см.* **3.** $\frac{64\pi}{3}+16\sqrt{3}$ *см*^{2}. **4.** 4 *см.* **В-ІІ. 1.** $840\sqrt{2}$ *см*^{2}. **2.** $\approx 10{,}6$ *см.*
3. $72°$. **4.** ≈ 510 *см*^{2}. **В-ІІІ. 1.** 288 *см*^{2}. **2.** $S_1 = 144$ *см*^{2}, $S_2 = 324$ *см*^{2}. **3.** $S = 530{,}66$ *см*^{2}.
4. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ *см.* **В-IV. 1.** 432 *см*^{2}. **2.** $S_1 = 900$ *см*^{2}, $S_2 = 1764$ *см*^{2}. **3.** $461{,}58$ *см*^{2}. **4.** $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ *см.*
В-V. 1. 380 *см*^{2}. **2.** $\frac{1}{2\pi}$. **3.** 468 *см*^{2}. **4.** $\frac{3}{5}\left(2\pi-\sqrt{3}\right)$ *см*^{2}. **В-VI. 1.** 64 *см*^{2}. **2.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$.
3. 6 *см*^{2} и 18 *см*^{2}. **4.** $S \approx 0{,}9$ *см*^{2}.

ЗМІСТ

7 клас

8 клас

9 клас