Тема уроку. Поняття об'єму. Основні властивості об'ємів. Об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Мета уроку: формування поняття об'єму; вивчення основних властивостей об'ємів; виведення формули для об'єму прямокутного паралелепіпеда; формування вмінь знаходити об'єм прямокутного паралелепіпеда.

I. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Об'єм, основні властивості об'ємів

Кожне геометричне тіло займає частину простору.

Об'ємом геометричного тіла будемо називати додатне число, яке характеризує частину простору, що займає геометричне тіло, і задовольняє таким умовам:

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.
2. Якщо тіло розбите на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.
3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини, називають ***одиничним***.

Об'єм одиничного куба приймають за одиницю об'єму, називаючи таку одиницю кубічною.

Наприклад: кубічний сантиметр — це об'єм куба, ребро якого дорівнює 1 см (рис. 142).

Виконання вправ

Поясніть, що таке:

а) 1 кубічний кілометр;

б) 1 кубічний метр;

в) 1 кубічний дециметр;

г) 1 кубічний міліметр.

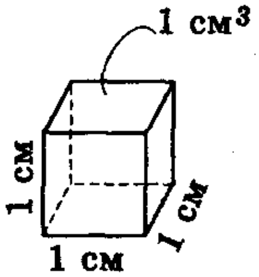


Рис. 142

Одиниці об'єму записують скорочено:

1 кубічний кілометр = 1 куб. км = 1 км^3;

1 кубічний метр = 1 куб. м = 1 м^3;

1 кубічний сантиметр = 1 куб. см = 1 см^3;

1 кубічний дециметр = 1 куб. дм = 1 дм^3;

1 кубічний міліметр = 1 куб. мм = 1 мм^3.

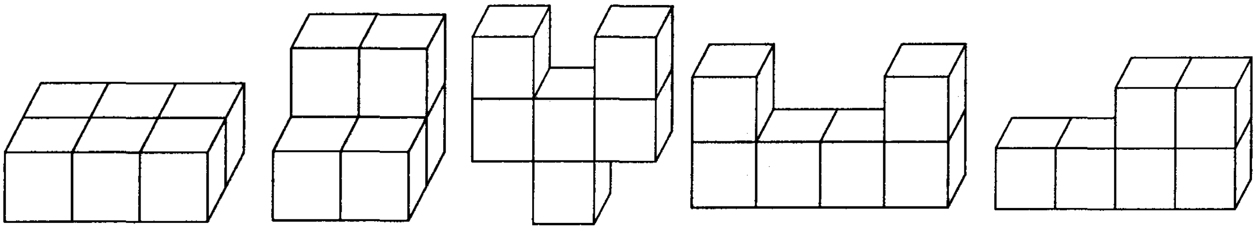
Одиниця об'єму 1 дм^3 має й іншу назву — 1 літр. Співвідношення між цими величинами подано нижче:

$$1\ \begin{matrix}\text{см}^3\\ \text{дм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix} = 10^3\ \begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\\ \text{дм}^3\end{matrix}$$

1 км^3 = $(10^3)^3$ м^3.

Виміряти об'єм, геометричного тіла — значить знайти число, яке показує, скільки одиничних кубів міститься в даному тілі.

На рис. 143 показано тіла, складені з кубів із ребром 1 см, їх об'єми дорівнюють по 6 см^3.



а б в д г

Рис. 143

Тіла, які мають рівні об'єми, називаються ***рівновеликими***. На рис. 143 тіла а—д рівновеликі.

Ми будемо далі розглядати лише ***прості тіла*** — тіла, які можна розбити на скінчене число трикутних пірамід. Вивчені многогранники: призми, піраміди, зрізані піраміди — є простими тілами.

Слід зазначити, що в «Началах» Евкліда і у творах Архімеда були виведені точні формули для знаходження об'ємів многогранників і деяких тіл обертання (циліндра, конуса, кулі та їх частин).

К. Ж. Жордан (1838—1922) — французький математик, один із засновників сучасної математики, розробив в 1892 році теорію площ і об'ємів.

У минулому одиницями вимірювання об'єму були міри посудин, які використовувались для зберігання сипких і рідких тіл. Наприклад, в Англії: 36,4 дм^3 — бушель; 4,5 дм^3 — галон; 159 дм^3 — барель; від 470 см^3 до 568 см^3 — пінта; на Русі: 12 дм^3 — відро; 1,2 дм^3 — штоф; 490 дм^3 — діжка.

У давнину міра маси, а отже і об'єму, часто збігалась із мірою вартості товару — грошовою одиницею.

На Русі основна одиниця маси — гривня — була водночас грошовою одиницею. Гривня — злиток срібла, маса якого наближено дорівнювала 1 фунту $\approx$ 96 золотникам, 1 золотник $\approx$ 4,3 г.

У другій половині XIII ст. гривню почали рубати пополам і назвали рублем, який із XV ст. став основною грошовою одиницею.

Зараз в Україні гривня — грошова одиниця.

Розв'язування задач

1. Два тіла рівні. Чи рівновеликі вони?
2. Два тіла рівновеликі. Чи рівні вони?

Формула для об'єму прямокутного паралелепіпеда

Об'єм прямокутного паралелепіпеда можна пояснити так.

Теорема

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто якщо a, b, c — лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм V обчислюється за формулою $V = abc$.

Д о в е д е н н я

Розглянемо три випадки.

1. Нехай виміри a, b, c прямокутного паралелепіпеда виражені натуральними числами. Такий паралелепіпед можна розрізати на с шарів, кожний з яких містить ab одиничних кубів (рис. 144). Отже, об'єм цього паралелепіпеда:

   $V = abc$.

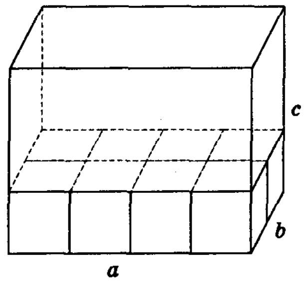


Рис. 144

2. Нехай виміри a, b, c прямокутного паралелепіпеда виражені раціональними числами. Зведемо ці числа до спільного знаменника, одержимо: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, $c = \frac{q}{n}$, де m, n, p, q — натуральні числа.

   Розіб'ємо паралелепіпед на куби, довжина ребра яких дорівнює $\frac{1}{n}$ частини одиниці довжини (рис. 145), загальна кількість таких кубів дорівнює mpq. Згідно з властивістю об'ємів об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку об'єму одного із цих кубів на число mpq. Але об'єм куба з ребром $\frac{1}{n}$ одиниці довжини дорівнює $\frac{1}{n^3}$ частини об'єму одиничного куба (рис. 146). Отже,

$$V = \frac{1}{n^3} mpq = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc$$

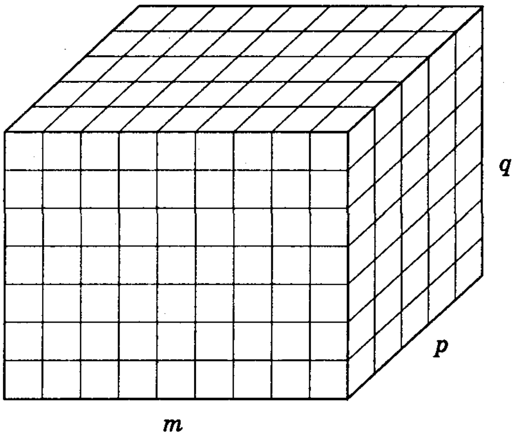


Рис. 145

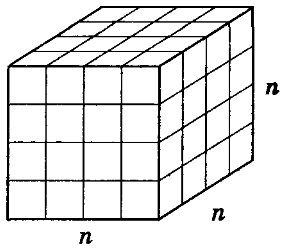


Рис. 146

3. Нехай хоча б одне з чисел a, b, c є число ірраціональне, тобто виражається нескінченним десятковим дробом. Позначимо через a_1 і a_2 наближені значення числа a з недостачею і з надлишком з точністю до n десяткових знаків. З тією самою точністю наближені значення з недостачею і з надлишком числа b позначимо через b_1 і b_2, а числа с — через c_1 і c_2. Кожне з чисел a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 виражається скінченним десятковим дробом. Тому за доведеним у п. 1 об'єми прямокутних паралелепіпедів з вимірами a_1, b_1, c_1 і a_2, b_2, c_2 відповідно дорівнюють $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2\,c_2$. Перший з цих паралелепіпедів можна помістити всередині даного паралелепіпеда, а інший — всередині другого (рис. 147). Отже, об'єм V даного паралелепіпеда міститься між $a_1b_1c_1$

і $a_2b_2\ c_2$. Оскільки $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2\ c_2$ — наближені значення числа abc з будь-якою наперед заданою точністю, то і в цьому випадку:
V = abc .

Наслідок 1. Об'єм куба дорівнює кубу його ребра: V = a^3, де a — довжина ребра куба.

Наслідок 2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на висоту.

Оскільки ab = S, c = h, то V = Sh.

Наслідок 3.У прямокутного паралелепіпеда будь-яку грань можна вважати основою.

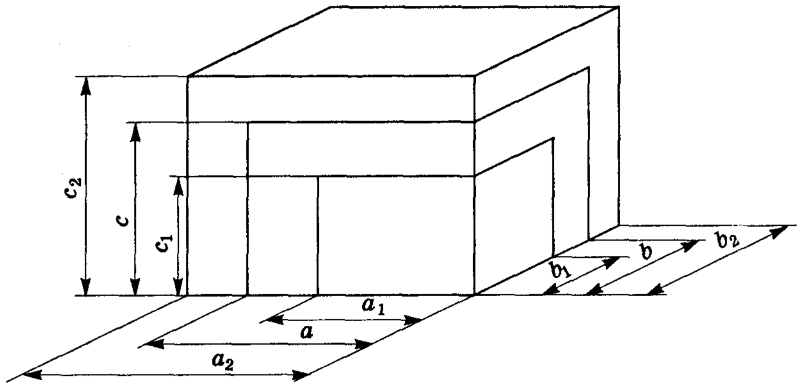


Рис. 147

Розв'язування задач

1. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює 5 см. (*Відповідь.* 125 см^3.)
2. Знайдіть об'єм куба, якщо площа повної поверхні дорівнює 150 см^2. (*Відповідь.* 125 см^3.)
3. Об'єм куба дорівнює 8 см^3. Знайдіть площу повної поверхні куба. (*Відповідь.* 24 см^2.)
4. Задача № 1 (с. 109).
5. Задача № 3 (с. 109).
6. Знайдіть об'єм куба, діагональ якого дорівнює d. (*Відповідь.* $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$)
7. Знайдіть об'єм куба, площа грані якого дорівнює Q. (*Відповідь.* $Q\sqrt{Q}$.)
8. Знайдіть об'єм куба, діагональ грані якого дорівнює d. (*Відповідь.* $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$.)
9. Знайдіть об'єм куба, площа діагонального перерізу якого дорівнює S. (*Відповідь.* $\left(\frac{S^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.)
10. Об'єм куба V. Знайдіть довжину його діагоналі. (*Відповідь.* $\sqrt[6]{27V^2}$.)
11. Задача № 8 (с. 109).
12. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см^2, 6 см^2, 9 см^2. Знайдіть його об'єм. (*Відповідь.* 18 см^3.)
13. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2, S_3. Доведіть, що V = $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо виміри паралелепіпеда a, b, c, то ab = S_1, ac = S_2, bc = S_3.

Перемноживши ці рівності, маємо: $a^2b^2c^2 = S_1S_2S_3$. Тоді об'єм паралелепіпеда $V = abc = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

14. Задача № 10 (с. 109).

Запитання до групи

1) Сформулюйте основні властивості об'єму.
2) Що таке 1 см^3; 1 м^3; 1 мм^3; 1 дм^3; 1 км^3?
3) Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда?
4) Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 6 см, 9 см, 7 см. (*Відповідь.* 378 см^3.)
5) Знайдіть об'єм піраміди, основа якої — грань куба, що має об'єм V, а вершина піраміди — точка перетину діагоналей цього куба. (*Відповідь.* $\frac{V}{6}$.)
6) У кубі, об'єм якого V, знаходиться правильний октаедр так, що всі його шість вершин збігаються з центрами граней куба. Знайдіть V об'єм октаедра. (*Відповідь.* $\frac{V}{4}$.)

Доведення теореми про об'єм призми рекомендується провести згідно з п. 68 § 7 підручника.

$$\boldsymbol{V_{пр.} = S_{осн.} \cdot H}$$

Р о з в ' я з у в а н н я   з а д а ч

1. *В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 і 8 см. Висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь. *240 см^3.)*
2. *В основі прямої призми лежить трикутник, сторона якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї — 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь. *240 см^3.)*
3. *В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї — 8 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 10 см. (*Відповідь. *480 см^3.)*
4. *В основі прямої призми лежить трапеція з основами 9 і 15 см і висотою 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.* *(*Відповідь. *600 см^3.)*
5. *Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть об'єм призми.* (Відповідь. *300 см^3.)*
6. *Задача № 19 (3) (с. 110).*
7. *Задача № 20 (с. 110).*
8. *Задача № 24 (с. 110).*
9. *Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні і мають площі 24 см^2 і 30 см^2. Знайдіть об'єм призми.* (Відповідь. *60 см^3.)*

Запитання до групи

1) *Чому дорівнює об'єм довільної призми?*
2) *Запишіть формулу для знаходження об'єму призми.*
3) *Чому дорівнює об'єм похилої призми?*
4) *В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гострим кутом р (рис. 152). Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу, дорівнює* a *і утворює з площиною основи кут α. Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:*
   а) висота призми дорівнює d cos α;
   б) гіпотенуза основи дорівнює d cos α;
   в) катет, прилеглий до кута β, дорівнює d sin α cos β;
   г) площа основи дорівнює $\frac{1}{4}$ $d^2 \cos^2 \alpha \sin 2\beta$;
   д) об'єм призми дорівнює $\frac{1}{4}$ $d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin 2\beta$.

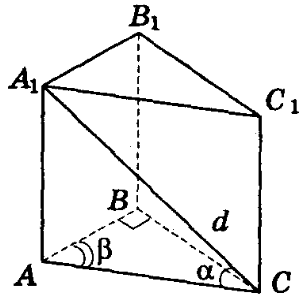


Рис. 152

Теорема про об'єм піраміди

Доведення теореми про об'єм піраміди можна провести у відповідності до п. 69, 70 § 7 підручника. Але враховуючи, що учні з курсу алгебри і початків аналізу знайомі із загальною формулою $V=\int_a^b S(x)dx$ *для обчислення об'ємів тіл, можна довести теорему про об'єм піраміди по-іншому.*

Теорема

Об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі *її* основи на висоту, тобто V=$\frac{1}{3}$SH, де S — площа основи піраміди, H — *її* висота.

Доведення

Нехай дано піраміду, площа основи якої S, *а висота* H *(рис. 153).*

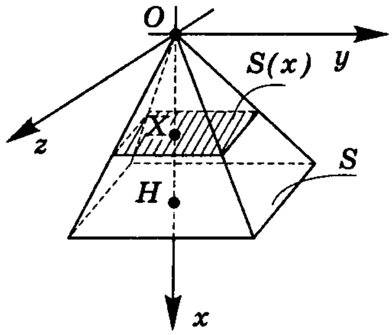


Рис. 153

Введемо систему координат так, щоб вершина піраміди була початком координат, а вісь Ox *направимо перпендикулярно до основи піраміди.*

Кожна січна площина, яка перпендикулярна до осі Ox, *перетинає піраміду по многокутнику, який подібний основі призми. Площу одержаного перерізу позначимо через* S(x). *Тоді* $\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2}$ *звідси* S(x) = $\frac{S}{H^2}$ x^2.

Використовуючи формулу $V=\int_a^b S(x)dx$ *для обчислення об'єму тіла при* a = 0; b = H, *одержимо:* $V=\int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$

$$= \frac{S}{H^2}\cdot\left(\frac{H^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$

Теорему доведено.

Розв'язування задач

1. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 3 см, бічне ребро — 5 см. Знайдіть об'єм піраміди. (Відповідь. *32 см*^{3}.)

2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, висота піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ *см. Знайдіть об'єм піраміди.* (Відповідь. *24 см*^{3}.)

3. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, висота — 4 см. Знайдіть об'єм піраміди. (Відповідь. $9\sqrt{3}$ *см*^{3}.)

4. Задача № 33 (1, 3) (с. 111).

5. Задача № 34 (с. 111).

Знаходження об'єму піраміди

Розв'язування задач

1. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює **Q,** *бічна поверхня —* S. *Знайдіть об'єм піраміди.*

Розв'язання

Нехай a *— довжина сторони основи, тоді* $a^2 = Q$; $2al = S$, *де* l *— апофема,* $l=\frac{S}{2a}$. *Знайдемо висоту* H *піраміди:*

$$H = \sqrt{l^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4a^2}-\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{S^2}{4Q}-\frac{Q}{4}} = \sqrt{\frac{S^2-Q^2}{4Q}} = \frac{\sqrt{S^2-Q^2}}{2\sqrt{Q}}.$$

Об'єм V *дорівнює:* $V = \frac{1}{3}S_{осн}H = \frac{1}{3}Q\frac{\sqrt{S^2-Q^2}}{2\sqrt{Q}} = \frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2-Q^2\right)}$.

Відповідь. $\frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2-Q^2\right)}$.

2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a*, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди.*

Р о з в ' я з а н н я

Нехай SABC *— правильна піраміда (рис. 154), в якій* $AB = BC = AC = a$;

$SO \perp (ABC)$; $\angle SBO = a$. *Площа основи* $S_1 = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

OB *— радіус кола, описаного навколо трикутника ABC,*

тому $0B = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. *Далі із ΔSOB* $SO = OB\ \mathrm{tg}\angle SBO = \frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha$.

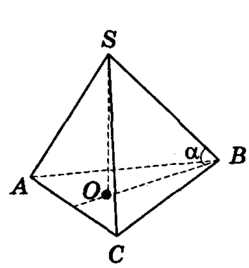


Рис. 154

Отже, шуканий об'єм V дорівнює: $V = \frac{1}{3}S_1\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

Відповідь. $\frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{12}$.

3. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює H, *а бічна грань утворює з основою кут α.*

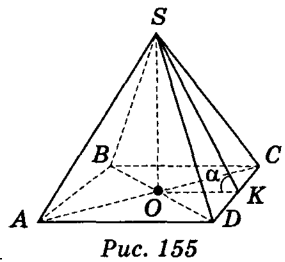


Рис. 155

Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай SABCD — *правильна чотирикутна піраміда (рис. 155), в якій* $SO \perp (ABC)$, $SO = H$. *Проведемо* $OK \perp DC$, *за теоремою протри перпендикуляри маємо:* $SK \perp CD$; *отже,* $\angle SKO = \alpha$.

Із ΔSKO $OK = OS\ ctg\ \angle SKO = H\ ctg\ \alpha$.

Оскільки $AD = 2 \cdot OK$, *то одержуємо:* $AD = 2H ctg\alpha$. *Тоді площа основи* $S_1 = AD^2 = 4H^2\ ctg^2\alpha$. *Отже, шуканий об'єм*

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot OS = \frac{1}{3} H^2\ ctg^г\alpha \cdot H = \frac{4}{3} H^3\ ctg^2\ \alpha.$$

Відповідь. $\frac{4}{3} H^3\ ctg^2\ \alpha$.

4. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, дорівнюють h *і нахилені до основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.*

Р о з в ' я з а н н я

Нехай SABCD — *дана піраміда (рис. 156);* ABCD — *ромб,* $\angle BAD = \alpha$; $SO \perp (ABC)$.

Проведемо $MN \perp BA$, $LK \perp BC$, *тоді* $SM \perp AB$, $SK \perp BC$, $SN \perp DC$, $SL \perp AD$ *(за теоремою про три перпендикуляри), і, отже,* $SM = SK = SN = SZ, = h$, $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO = \angle SLO = \beta$. *Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, то точка O — центр кола, вписаного в ромб* ABCD.

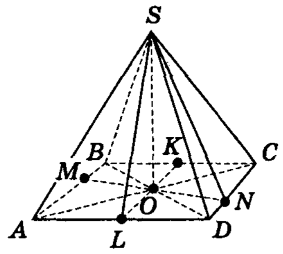


Рис. 156

Із ΔSLO $SO = SL \sin \angle SLO = h \sin \beta$;

$LO = SL \cos \angle SLO = h \cos \beta$.

Враховуємо, що $LK = 2h \cos \beta$. *Сторона ромба* $AB = \dfrac{LK}{\sin \angle BAD} = \dfrac{2h\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Отже, $S_1 = AB \cdot LK = \dfrac{2h\cos\beta}{\sin\alpha} \cdot 2h \cos\beta = \dfrac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha}$.

Тоді $V = \dfrac{1}{3} S_1 \cdot H = \dfrac{1}{3} S_1 \cdot SO = \dfrac{1}{3} \dfrac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha} h \sin\beta = \dfrac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

Запитання до групи

1) Чому дорівнює об'єм будь-якої піраміди?

2) Запишіть формулу для обчислення об'єму піраміди.

3) Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту збільшити в п *раз, а сторону зменшити у стільки ж раз?*

4) Чи рівновеликі дві піраміди з рівними висотами, якщо їх основами є чотирикутники з відповідно рівними сторонами?

Домашнє завдання

Л.6 №51 с.375