Тема уроку: Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості.
Мета уроку: Формування поняття первісної функції та поняття невизначеного інтегралу, знання таблиці первісних.

I. Сприймання і усвідомлення поняття первісної.

При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати *s(t)* матеріальної точки. Миттєва швидкість *v*(*t*) дорівнює похідній функції *s(t),* тобто *v(t) = s'(t).*

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості *v(t)* руху точки знайти пройдений нею шлях *s(t),* тобто знайти таку функцію s(і), похідна якої дорівнює *v*(*t*). Функцію s(*t*) таку, що *s'(t) = v(t),* називають первісною функції *v(t).* Наприклад, якщо *v{t) = gt,* то *s(t) =* $\frac{gt^2}{2}$ є первісною функції *v(t),* оскільки $g'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^I = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$.

Функція *F(x)* називається *первісною* функції *f(x)* на деякому проміжку, якщо для всіх *x* із цього проміжку виконується рівність: *F'(X) = f(x).*

Наприклад, функція *F(x)* = sin *x* є первісною функції *f(x) = cos x* для *x* є *R,* бо (sin *x)'* = cos *x;* функція *F(x) = tg x* є первісною функції *f(x)* = $\frac{1}{cos^2 x}$, бо *F'(x) = (tgx)'* = $\frac{1}{cos^2 x}$ *= f(x)* для всіх *x,* крім *x* = $\frac{\pi}{2}$ *+ πn, n* є *Z.*

Виконання вправ

Покажіть, що функція *F(x)* є первісною функції *f(x)* для вказаних значень *x:*

1. $F(x) = kx$, $f(x) = k$, x є R.
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $f(x) = x^n$, x є $(0; +\infty)$, $n \neq -1$.
3. $F(x) = ln|x|$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
4. $F(x) = e^x$, $f(x) = e^x$, x є R.
5. $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$, $f(x)=a^x$, x є R.
6. $F(x) = -cos\, x$, $f(x) = sin\, x$, x є R.
7. $F(x) = -ctg\, x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$.

II. Сприймання і усвідомлення основної властивості первісної, поняття невизначеного інтеграла.

Розглянемо функцію *f(x) = x*^{2}. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції *f(x).*

Дійсно, $F_1^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)^I=\frac{3x^2}{3}=x^2=f(x)$, $F_2^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}+2\right)^I=x^2+0=x^2=f(x)$,

$F_3^I(x)=\left(\frac{x^3}{3}-5\right)^I=x^2-0=x^2=f(x)$.

Взагалі будь-яка функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$ + С, де С — постійна, є первісною функції x^2. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначне.

Теорема 1. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної С функція *F(x) + C* також є первісною для функції *f(x)*.

Доведення

Оскільки *F(x)* — первісна функції *f(x),* то *F'(x) = f(x).*

Тоді *(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),* а ця рівність означає, що *F(x) + C* є первісною для функції *f(x).*

Теорема 2. Нехай функція *F(x)* є первісною для *f(x)* на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції *f(x)* на цьому проміжку може бути записана у вигляді *F(x) + C,* де С — деяка стала (число).

Доведення

Нехай *F(x)* і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції *f(x),* тобто $F^I(x)=f(x)$, $F_1^I(x)=f(x)$. Похідна різниці $g(x)=F(x)-F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x)=F_1^I(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Якщо $g'(x)=0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції $y=g(x)$ у кожній точці цього проміжку паралельна осі *OX.* Тому графіком функції $y=g(x)$ є пряма, яка паралельна осі *OX,* тобто $g(x)$ = С, де *C* — деяка стала. Із рівностей $g(x)=C$, $g(x)=F_1(x)-F(x)$ випливає, що $F_1(x)-F(x)=C$, або $F_1(x)=F(x)+C$.

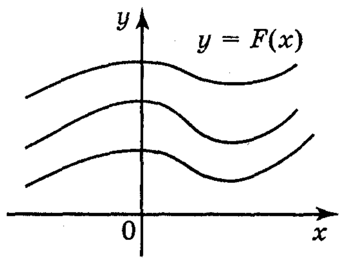

Рис. 87

Теореми 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції *f* одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі *OY* (рис. 87).

Нехай функція *f* має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції *f(x)* на проміжку називають невизначеним інтегралом цієї функції і позначають $\int f(x)dx$. функцію *f(x)* називають *підінтегральною функцією.*

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx$ = *F{x) + C,* де *F(x)* — яка-небудь первісна для функції *f(x)* на даному проміжку, С — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція sin *x* є первісною для функції cos *x* на проміжку (-∞; +∞), тому можна записати, що

$$\int \cos x dx=\sin x+C.$$

III. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів).

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі (таблиця 9).

Таблиця 9 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

VI. Домашнє завдання.

Л.1 §1 с.368, Л.6 №10 с.193